Applications harmoniques à valeurs dans la sphère : à quel point peuvent-elles mal se comporter ?

Antoine Detaille

`andetaille.github.io`

Université Claude Bernard Lyon 1 — Institut Camille Jordan

Le 17 octobre 2024

Un problème classique

Rappel : le problème de Dirichlet

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|\mathrm{D}u|^2 \colon u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3), u = \varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)\right\}.$$

Associé au problème de moindre action en physique.

Important d'un point de vue historique, problème de calcul des variations, a motivé le développement des espaces de Sobolev notamment.

Un problème classique

Rappel : le problème de Dirichlet

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|\mathrm{D}u|^2 \colon u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3), u = \varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)\right\}.$$

Associé au problème de moindre action en physique.

Important d'un point de vue historique, problème de calcul des variations, a motivé le développement des espaces de Sobolev notamment.

Un problème classique

Rappel : le problème de Dirichlet

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|Du|^2 \colon u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3), u = \varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)\right\}.$$

Associé au problème de moindre action en physique.

Important d'un point de vue historique, problème de calcul des variations, a motivé le développement des espaces de Sobolev notamment.

Propriétés importantes

Pour une donnée au bord $\varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)$ fixée,

- il existe un minimiseur (méthode directe du calcul des variations) ;
- le minimiseur est unique (convexité stricte de la fonctionnelle minimisée) ;
- le minimiseur est régulier : continu, et même analytique (équation d'Euler–Lagrange associée $\Delta u = 0$).

Propriétés importantes

Pour une donnée au bord $\varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)$ fixée,

- il existe un minimiseur (méthode directe du calcul des variations) ;
- le minimiseur est unique (convexité stricte de la fonctionnelle minimisée) ;
- le minimiseur est régulier : continu, et même analytique (équation d'Euler–Lagrange associée $\Delta u = 0$).

Propriétés importantes

Pour une donnée au bord $\varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)$ fixée,

- il existe un minimiseur (méthode directe du calcul des variations) ;
- le minimiseur est unique (convexité stricte de la fonctionnelle minimisée) ;
- le minimiseur est régulier : continu, et même analytique (équation d'Euler–Lagrange associée $\Delta u = 0$).

Propriétés importantes

Pour une donnée au bord $\varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3)$ fixée,

- il existe un minimiseur (méthode directe du calcul des variations) ;
- le minimiseur est unique (convexité stricte de la fonctionnelle minimisée) ;
- le minimiseur est régulier : continu, et même analytique (équation d'Euler–Lagrange associée $\Delta u = 0$).

Un problème sous contrainte géométrique

On considère une variante du problème de Dirichlet :

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|\mathrm{D}u|^2 : u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2),\, u = \varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)\right\}.$$

Pourquoi considérer une contrainte géométrique ?

- Applications pour des problèmes de matière condensée : cristaux liquides, modèle d'Oseen-Frank simplifié.
- Applications en design numérique ; voir par exemple Huang, Tong, Wei, Bao (2011), ou le projet *Hextreme*.

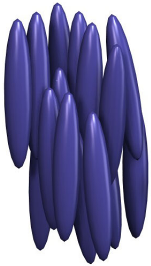
Un problème sous contrainte géométrique

On considère une variante du problème de Dirichlet :

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|Du|^2 : u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2),\, u=\varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)\right\}.$$

Pourquoi considérer une contrainte géométrique ?

- Applications pour des problèmes de matière condensée : cristaux liquides, modèle d'Oseen-Frank simplifié.
- Applications en design numérique ; voir par exemple Huang, Tong, Wei, Bao (2011), ou le projet *Hextreme*.



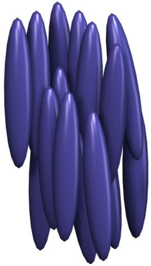
Un problème sous contrainte géométrique

On considère une variante du problème de Dirichlet :

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{B}^3}|Du|^2 : u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2),\, u = \varphi \text{ sur } \mathbb{B}^3 \text{ avec } \varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)\right\}.$$

Pourquoi considérer une contrainte géométrique ?

- Applications pour des problèmes de matière condensée : cristaux liquides, modèle d'Oseen-Frank simplifié.
- Applications en design numérique ; voir par exemple Huang, Tong, Wei, Bao (2011), ou le projet *Hextreme*.



Perte de régularité I

Théorème

L'application $u_0 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$ définie par

$$u_0(x) = \frac{x}{|x|}$$

est l'unique minimiseur de l'énergie de Dirichlet pour la donnée au bord identité.

Dû à Brezis, Coron, et Lieb (1986). Voir aussi Hong (2001) et les références qui s'y trouvent pour un résultat plus général et un historique du problème.

Perte de régularité II

Même pour une donnée au bord de degré nul, il peut y avoir des singularités.

Théorème

Étant donnés $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq p < 2$, et $M \in \mathbb{N}$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$ telle que $\deg \varphi = \deg \psi$, $\|\varphi - \psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{S}^2)} \leq \varepsilon$, $\varphi = \psi$ en dehors de $B_\varepsilon(q)$, et ψ admet un unique minimiseur, possédant au moins $\deg \varphi + M$ singularités.

Version dûe à Mazowiecka (2018), avec des idées déjà présentes chez Almgren et Lieb (1988).

Théorie de la régularité

En fait, des singularités isolées sont le pire qui peut se produire.

Théorème (Schoen, Uhlenbeck (1982, 1983))

Les minimiseurs de l'énergie de Dirichlet avec contrainte sphère sont continus (et même analytiques) en dehors d'une union discrète de singularités ponctuelles.
Si la donnée au bord est lisse, alors les minimiseurs sont lisses sur un voisinage du bord.

Perte d'unicité

- Il existe une donnée au bord planaire admettant au moins deux minimiseurs, un à valeurs dans chaque hémisphère (Hardt, Kinderlehrer (1988)).
- Il existe une donnée au bord avec symétrie miroir admettant au moins deux minimiseurs ne possédant pas cette symétrie miroir (Almgren, Lieb (1988)).
- Il existe une donnée au bord admettant au moins deux minimiseurs, un lisse et l'autre non (Hardt, Lin (1989)).
- Il existe une donnée au bord admettant une famille continue à 1 paramètre de minimiseurs (Hardt, Kinderlehrer, Lin (1990)).

Perte d'unicité

- Il existe une donnée au bord planaire admettant au moins deux minimiseurs, un à valeurs dans chaque hémisphère (Hardt, Kinderlehrer (1988)).
- Il existe une donnée au bord avec symétrie miroir admettant au moins deux minimiseurs ne possédant pas cette symétrie miroir (Almgren, Lieb (1988)).
- Il existe une donnée au bord admettant au moins deux minimiseurs, un lisse et l'autre non (Hardt, Lin (1989)).
- Il existe une donnée au bord admettant une famille continue à 1 paramètre de minimiseurs (Hardt, Kinderlehrer, Lin (1990)).

Perte d'unicité

- Il existe une donnée au bord planaire admettant au moins deux minimiseurs, un à valeurs dans chaque hémisphère (Hardt, Kinderlehrer (1988)).
- Il existe une donnée au bord avec symétrie miroir admettant au moins deux minimiseurs ne possédant pas cette symétrie miroir (Almgren, Lieb (1988)).
- Il existe une donnée au bord admettant au moins deux minimiseurs, un lisse et l'autre non (Hardt, Lin (1989)).
- Il existe une donnée au bord admettant une famille continue à 1 paramètre de minimiseurs (Hardt, Kinderlehrer, Lin (1990)).

Perte d'unicité

- Il existe une donnée au bord planaire admettant au moins deux minimiseurs, un à valeurs dans chaque hémisphère (Hardt, Kinderlehrer (1988)).
- Il existe une donnée au bord avec symétrie miroir admettant au moins deux minimiseurs ne possédant pas cette symétrie miroir (Almgren, Lieb (1988)).
- Il existe une donnée au bord admettant au moins deux minimiseurs, un lisse et l'autre non (Hardt, Lin (1989)).
- Il existe une donnée au bord admettant une famille continue à 1 paramètre de minimiseurs (Hardt, Kinderlehrer, Lin (1990)).

Un théorème d'unicité générique

Malgré ça, « la plupart » des données au bord admettent un unique minimiseur.

Théorème d'unicité générique d'Almgren (Almgren, Lieb (1988))

Étant donnés $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$ telle que $\|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{S}^2)} \leq \varepsilon$ admettant un unique minimiseur. En outre, $\varphi = \psi$ hors de $B_\varepsilon(q)$.

Un théorème de non-unicité générique

Si on prend $1 \leq p < 2$, il se trouve que « la plupart » des données au bord exhibent également de la non-unicité.

Théorème (D., Mazowiecka (2024))

Étant donnés $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$, $\varepsilon > 0$, et $1 \leq p < 2$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^2)$ telle que $\|\varphi - \psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{S}^2)} \leq \varepsilon$ admettant au moins deux minimiseurs avec un nombre différent de singularités.

Quelques résultats utiles I

Théorème de stabilité (Hardt, Lin (1989))

Soit $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2;\mathbb{S}^2)$ admettant un unique minimiseur. Il existe $\delta > 0$ tel que, si $\psi \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2;\mathbb{S}^2)$ est telle que $\|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{S}^2;\mathbb{S}^2)} \leq \delta$, alors tout minimiseur pour ψ a le même nombre de singularités que le minimiseur pour φ.

Quelques résultats utiles II

Convergence forte des minimiseurs (Almgren, Lieb (1988))

Supposons que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de minimiseurs avec donnée au bord φ_i. Supposons en outre que $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$. Alors, à extraction d'une sous-suite près, $u_i \longrightarrow u$ fortement dans $W^{1,2}(\mathbb{B}^3)$, et u est un minimiseur.

Quelques résultats utiles III

Les singularités sont des limites de singularités (Almgren, Lieb (1988))

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de minimiseurs qui converge fortement dans $W^{1,2}$ vers un minimiseur u. Si u a une singularité en y, alors pour i suffisamment grand, u_i a une singularité en un point y_i avec $y_i \longrightarrow y$.

Quelques résultats utiles IV

Les singularités convergent vers des singularités (Almgren, Lieb (1988))

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de minimiseurs qui converge fortement dans $W^{1,2}$ vers un minimiseur u. Si y_i est une singularité de u_i et $y_i \to y$, alors y est une singularité de u.

Régularité au bord uniforme (Almgren, Lieb (1988))

Sous contrôle de l'énergie $W^{1,2}$ de la donnée au bord sur des boules, il existe un voisinage uniforme de $\partial\mathbb{B}^3$ sur lequel les minimiseurs n'ont pas de singularités.

Distance uniforme entre les singularités (Almgren, Lieb (1988))

Il existe une constante $C > 0$ telle que, si y est une singularité d'un minimiseur u, alors u n'a pas d'autre singularité à distance moins de $C \operatorname{dist}(y, \partial\mathbb{B}^3)$ de y.

Quelques résultats utiles IV

Les singularités convergent vers des singularités (Almgren, Lieb (1988))

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de minimiseurs qui converge fortement dans $W^{1,2}$ vers un minimiseur u. Si y_i est une singularité de u_i et $y_i \to y$, alors y est une singularité de u.

Régularité au bord uniforme (Almgren, Lieb (1988))

Sous contrôle de l'énergie $W^{1,2}$ de la donnée au bord sur des boules, il existe un voisinage uniforme de $\partial\mathbb{B}^3$ sur lequel les minimiseurs n'ont pas de singularités.

Distance uniforme entre les singularités (Almgren, Lieb (1988))

Il existe une constante $C > 0$ telle que, si y est une singularité d'un minimiseur u, alors u n'a pas d'autre singularité à distance moins de $C\,\mathrm{dist}(y, \partial\mathbb{B}^3)$ de y.

Quelques résultats utiles IV

Les singularités convergent vers des singularités (Almgren, Lieb (1988))

Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de minimiseurs qui converge fortement dans $W^{1,2}$ vers un minimiseur u. Si y_i est une singularité de u_i et $y_i \longrightarrow y$, alors y est une singularité de u.

Régularité au bord uniforme (Almgren, Lieb (1988))

Sous contrôle de l'énergie $W^{1,2}$ de la donnée au bord sur des boules, il existe un voisinage uniforme de $\partial\mathbb{B}^3$ sur lequel les minimiseurs n'ont pas de singularités.

Distance uniforme entre les singularités (Almgren, Lieb (1988))

Il existe une constante $C > 0$ telle que, si y est une singularité d'un minimiseur u, alors u n'a pas d'autre singularité à distance moins de $C\,\mathrm{dist}(y, \partial\mathbb{B}^3)$ de y.

Un ingrédient clef : une construction d'homotopie

Proposition

Soient $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^2;\mathbb{S}^2)$ et $1 \leq p < 2$. Pour tous $r > 0$ et $q \in \mathbb{S}^2$, et pour toute $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^2;\mathbb{S}^2)$ homotope à φ avec $\varphi = \psi$ en dehors de $B_r(q)$, il existe une homotopie $H \in C^\infty(\mathbb{S}^2 \times [0,1];\mathbb{S}^2)$ entre φ et ψ telle que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \|\varphi - H_t\|_{W^{1,p}(\mathbb{S}^2)} \lesssim \|\varphi\|_{W^{1,p}(B_{2r}(q))} + \|\psi\|_{W^{1,p}(B_{2r}(q))}.$$

Problèmes ouverts

1. Dans la construction d'homotopie, peut-on obtenir $\sup_{0\leq t\leq 1}\|\varphi - H_t\|_{W^{1,p}(\mathbb{S}^2)} \leq \omega(\|\varphi - \psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{S}^2)})$, avec ω un module de continuité adéquat ?
2. Peut-on obtenir de la généricité au sens de Baire dans un des deux scénarios (unicité ou non-unicité) ?

Merci de votre attention !