

**La mesure de Hausdorff**  
**Un théorème de décomposition**

Antoine Detaille

PROMOTEUR : P<sup>R</sup> AUGUSTO PONCE

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
FACULTÉ DES SCIENCES  
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUE  
2019–2020



## Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1. La mesure de Hausdorff	3
1. Définitions et énoncé du théorème de décomposition	3
2. Propriétés de la mesure de Hausdorff	10
Chapitre 2. Le théorème de décomposition	23
1. Ensembles et mesures $s$ -droits	23
2. La démonstration du théorème	28
Conclusion	43
Annexe A. Génération de mesures	45
Bibliographie	47



## Introduction

Peut-on décomposer un arc de cercle en ensembles droits? Pour pouvoir répondre à cette question, il faudrait définir ce qu'est un ensemble droit. Mettons temporairement cette difficulté de côté en considérant qu'un ensemble droit est un ensemble qui a l'apparence d'un segment. Il suffit de dessiner un arc de cercle pour se convaincre que la réponse doit certainement être non. Après tout, un arc de cercle est une courbe, il est donc peu vraisemblable de pouvoir le décomposer en ensembles droits.

Comment calculer la taille des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$ ? La mesure de Lebesgue fournit une réponse raisonnable à cette question, en définissant une notion de volume avec de bonnes propriétés. Néanmoins, une insatisfaction demeure. La mesure de Lebesgue ne « voit » pas les ensembles dont la dimension est inférieure à celle de l'espace ambiant. Par exemple, une sphère dans  $\mathbb{R}^3$  est de mesure de Lebesgue nulle. Nous voudrions pourtant pouvoir donner un sens à l'aire de cette sphère, mais la mesure de Lebesgue ne le permet pas de manière directe.

Une réponse à cela est la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ . Définie pour tout  $0 \leq s < +\infty$ , elle capture la notion de volume  $s$ -dimensionnel des parties de  $\mathbb{R}^N$ , en possédant toutes les propriétés qu'on attend d'une telle quantité.

Quel est le rapport avec la première question? Il s'avère que la mesure de Hausdorff permet de donner une définition d'ensemble droit. Et avec cette définition, de manière tout à fait surprenante, une réponse affirmative a été donnée par un théorème démontré en 2002 par Delaware.

Le but de ce travail est de généraliser ce résultat. Dans un premier temps, nous commencerons par étudier la mesure de Hausdorff. Nous verrons comment elle est définie, et nous en établirons les principales propriétés. Ensuite, dans un second temps, nous nous dirigerons vers notre objectif principal, la généralisation du théorème de Delaware. Nous montrerons que, si  $\mu$  est une mesure de Borel  $\sigma$ -finie sur  $\mathbb{R}^N$  vérifiant  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , alors il est possible de décomposer  $\mathbb{R}^N$  en une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\mu(E_n \cap B_r(x)) \leq \omega_s r^s,$$

où  $\omega_s$  est une constante que nous définirons ultérieurement – lorsque  $s$  est un entier,  $\omega_s$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^N$ . Nous verrons cela plus en détail par après, mais mentionnons qu’il s’agit d’un beau résultat qui traduit l’inégalité abstraite  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  en une estimation beaucoup plus concrète pour  $\mu$ .

Nous nous sommes efforcés de rendre ce texte accessible avec un minimum de prérequis en théorie de la mesure. Aussi, nous rappelons systématiquement les définitions et résultats que nous utilisons, et nous les avons souvent restreints au cadre que nous étudions dans ce travail. Nous espérons que la lecture de ce document motivera l’étude de ce beau domaine qu’est la théorie de la mesure.

## La mesure de Hausdorff

### 1. Définitions et énoncé du théorème de décomposition

Dans cette section, nous commençons par définir et illustrer la notion qui sera l'objet d'étude de tout ce travail, la *mesure de Hausdorff*. Ensuite, nous énoncerons et expliquerons le théorème de décomposition qui est l'objectif central de ce texte.

La motivation de la mesure de Hausdorff est la suivante. Nous voulons définir un objet qui, pour  $0 \leq s < +\infty$ , mesure le « volume  $s$ -dimensionnel » des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$ . On se base sur l'idée qui suit. Nous connaissons bien le volume  $N$ -dimensionnel d'une boule de rayon  $r \geq 0$ . Il s'exprime en termes de la fonction gamma comme

$$(***) \quad \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)} r^N,$$

où on rappelle que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

avec  $x > 0$ . Or, l'expression (\*\*\*) fait encore sens en remplaçant  $N$  par  $0 \leq s < +\infty$  non nécessairement entier, et nous définissons ainsi le volume  $s$ -dimensionnel de la boule. Pour un sous-ensemble arbitraire de  $\mathbb{R}^N$ , nous allons le recouvrir par une quantité dénombrable de boules ouvertes, et sommer sur le volume  $s$ -dimensionnel de ces boules ainsi défini. En prenant l'infimum sur le volume de tels recouvrements, on s'attend à obtenir une quantité correspondant au volume  $s$ -dimensionnel de notre sous-ensemble.

Donnons à présent la définition mathématique. On commence par une notion intermédiaire.

**DÉFINITION 1.1.** Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . On définit la capacité de Hausdorff  $\mathcal{H}_\delta^s$  pour  $E \subset \mathbb{R}^N$  par

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s : E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n), 0 \leq r_n \leq \delta \right\},$$

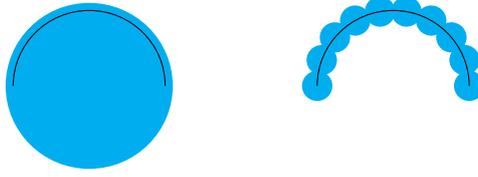


FIGURE 1. Recouvrements d'un arc de cercle

où  $B_{r_n}(x_n)$  désigne la boule ouverte de rayon  $r_n$  centrée en  $x_n \in \mathbb{R}^N$ , et

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

est le volume de la boule unité  $s$ -dimensionnelle, calculé en termes de la fonction gamma.

Dans le cas où  $s = 0$ , la série définissant  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  peut contenir des termes de la forme «  $0^0$  ». Par convention, nous fixons  $0^0 = 0$ .

Notons que les recouvrements finis sont également admissibles dans la définition de la capacité de Hausdorff, puisque nous pouvons les compléter en des recouvrements dénombrables avec des boules de rayon nul sans en changer la contribution – y compris si  $s = 0$  en vertu de notre convention pour  $0^0$ .

Remarquons que dans cette définition des capacités, nous avons utilisé une jauge pour contrôler le rayon des boules admissibles dans les recouvrements, dont il n'était pas question dans l'explication qui précède. La motivation de cela se comprend de manière très visuelle. Imaginons vouloir calculer la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1$  d'un arc de cercle. Intuitivement, nous voudrions le recouvrir par des boules en suivant son tracé, et on s'attend à avoir une bonne approximation de sa longueur en prenant des boules de rayon de plus en plus réduit et se chevauchant de moins en moins. Cependant, il est possible de « tricher », en recouvrant l'arc de cercle par une seule grande boule, ce qui fausse complètement le calcul de l'infimum. L'introduction d'une jauge permet d'éviter ce genre de comportement, et contrôle que les recouvrements considérés reflètent bien la forme de l'objet mesuré. On trouvera une illustration sur la figure 1.

Pour arriver à la notion souhaitée, nous allons donc vouloir considérer les capacités  $\mathcal{H}_\delta^s$  pour des  $\delta$  de plus en plus petits. Plus rigoureusement, nous désirons prendre la limite  $\delta \rightarrow 0$ . À cette fin, on observe que  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  croît quand  $\delta$  décroît, puisque si  $\delta' \leq \delta$ , tous les recouvrements intervenant dans le calcul de  $\mathcal{H}_{\delta'}^s(E)$  interviennent également dans le calcul de  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ . Donc,

la limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

existe toujours dans  $[0, +\infty]$ . Ceci assure que la définition suivante est bien donnée.

**DÉFINITION 1.2.** *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . On définit la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle  $\mathcal{H}^s$  pour  $E \subset \mathbb{R}^N$  par*

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

*Le contenu de Hausdorff  $s$ -dimensionnel  $\mathcal{H}_\infty^s$  est la capacité de Hausdorff avec la jauge  $\delta = +\infty$ .*

Cette construction est l'approche originelle utilisée par Hausdorff dans son article [5] où est définie pour la première fois cette mesure. Une autre construction couramment employée – voir par exemple [2, 3] – consiste à autoriser des recouvrements par des ensembles arbitraires, et utiliser le diamètre à la puissance  $s$  pour estimer leur volume  $s$ -dimensionnel. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette autre définition, mais mentionnons simplement qu'elle donne naissance à une autre quantité, qui ne coïncide pas avec celle qu'on obtient avec des boules, mais qui lui est comparable à un facteur multiplicatif près.

Selon qu'on utilise ou non cette jauge, on obtient deux objets différents, la mesure et le contenu de Hausdorff. Il suit directement de la définition que, pour tout  $0 \leq s < +\infty$ ,

$$\mathcal{H}_\infty^s \leq \mathcal{H}^s.$$

On peut se demander ce qu'il en est de l'inégalité inverse, et plus généralement quelles sont les différences entre la mesure et le contenu de Hausdorff.

Nous allons illustrer quelques unes de ces différences avec des exemples. Comme le lecteur pourra le constater ultérieurement, les raisonnements complets deviennent rapidement fort techniques quand on travaille avec la mesure de Hausdorff. Aussi, dans cette section, nous omettons volontairement les détails dans les exemples, pour nous concentrer sur l'intuition qu'ils véhiculent.

**EXEMPLE 1.3.** *Considérons un arc de cercle dans  $\mathbb{R}^2$ . Plus précisément, soit  $E = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$ . Il est aisé de constater que*

$$\mathcal{H}_\infty^1(E) \leq 2.$$

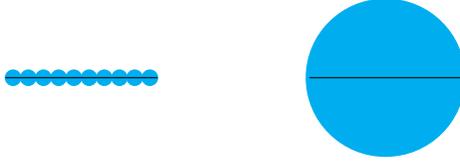


FIGURE 2. Calcul de la mesure et du contenu de Hausdorff d'un segment

Il suffit de considérer, pour tout  $\theta > 1$ , le recouvrement  $E \subset B_\theta(0)$ . En revanche, comme le suggère la figure 1,

$$\mathcal{H}^1(E) = \pi.$$

Ceci sera démontré avec tous les détails dans l'exemple 1.31.

Ceci révèle que l'inégalité  $\mathcal{H}_\infty^s \leq \mathcal{H}^s$  est en général stricte. L'exemple suivant nous montre qu'on ne peut même pas espérer contrôler l'écart entre ces deux quantités.

EXEMPLE 1.4. Soit  $E = B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité. Alors,

$$\mathcal{H}^1(E) = +\infty, \quad \mathcal{H}_\infty^1(E) \leq \pi r^2.$$

On peut donc construire un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  de mesure  $\mathcal{H}^1$  infinie mais de contenu  $\mathcal{H}_\infty^1$  arbitrairement petit. On reviendra plus en détail sur ce phénomène dans les exemples 1.20 et 1.24.

Les deux exemples suivants complètent cette brève revue des différences entre la mesure et la capacité de Hausdorff.

EXEMPLE 1.5. Définissons  $E = [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ , qui est un segment unité dans  $\mathbb{R}^2$  tel que représenté sur la figure 2. Comme le laisse penser l'illustration, on a

$$\mathcal{H}^1(E) = 1 = \mathcal{H}_\infty^1(E).$$

Pour une preuve complète de cela, le lecteur pourra consulter l'exemple 2.1, dont ceci est un cas particulier.

EXEMPLE 1.6. Supposons que  $E_1$  et  $E_2$  sont deux segments disjoints comme ceux représentés à la figure 3,  $E_1 = [0, 1] \times \{0\}$ ,  $E_2 = [\frac{1}{20}, \frac{19}{20}] \times \{\frac{1}{5}\}$ . Posons  $E = E_1 \cup E_2$ . Puisque  $E_1$  et  $E_2$  sont à distance  $\frac{1}{5}$  l'un de l'autre, une boule de rayon inférieur à  $\frac{1}{10}$  ne peut intersecter à la fois  $E_1$  et  $E_2$ . Donc, si  $\delta \leq \frac{1}{10}$ , on peut fusionner un recouvrement de  $E_1$  et de  $E_2$  par des boules de rayon au plus  $\delta$  en un recouvrement de  $E$ , et inversement on peut séparer un recouvrement de  $E$  par des boules de rayon au plus  $\delta$  en un recouvrement de  $E_1$  et un

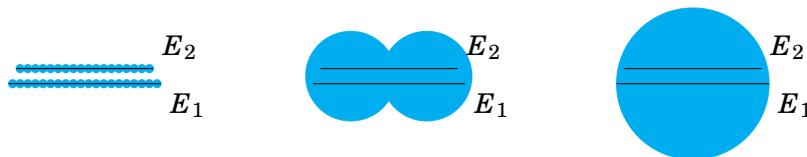


FIGURE 3. Recouvrements d'une union disjointe de segments par des boules de petits et grands rayons

recouvrement de  $E_2$ . Dès lors, on en déduit que  $\mathcal{H}_\delta^1(E_1) + \mathcal{H}_\delta^1(E_2) = \mathcal{H}_\delta^1(E)$ , et en passant à la limite, on trouve

$$\mathcal{H}^1(E_1) + \mathcal{H}^1(E_2) = \mathcal{H}^1(E).$$

En revanche, si  $\delta$  devient nettement supérieur à  $\frac{1}{10}$ , on peut trouver des recouvrements plus économiques de  $E$  en couvrant simultanément  $E_1$  et  $E_2$  avec les mêmes boules, d'où

$$\mathcal{H}_\delta^1(E) < \mathcal{H}_\delta^1(E_1) + \mathcal{H}_\delta^1(E_2).$$

Le cas extrême est celui de  $\delta = +\infty$ . Dans ce cas, on a  $E \subset B_{\frac{\theta}{2}}((\frac{1}{2}, 0))$  pour tout  $\theta > 1$ , et on a alors

$$\mathcal{H}_\infty^1(E) = 1 = \mathcal{H}_\infty^1(E_1) < \mathcal{H}_\infty^1(E_1) + \mathcal{H}_\infty^1(E_2).$$

Cet exemple illustre une propriété importante. Nous voyons en effet que les capacités de Hausdorff échouent à être additives. Une manière imagée de comprendre cela est de se dire que plus la jauge se réduit, plus la capacité donne une estimation précise de la mesure d'un ensemble. Si la jauge est trop importante, la capacité ne distingue donc pas correctement deux ensembles disjoints qui ne sont pas suffisamment éloignés. En revanche, comme suggéré par l'exemple, nous verrons ultérieurement que la mesure de Hausdorff, elle, jouit bien de cette propriété d'additivité.

Le segment exhibe un autre comportement intéressant. Sa mesure et son contenu de Hausdorff coïncident. Intuitivement, cela est dû à son caractère rectiligne, qui exclut la possibilité de trouver des recouvrements trop économiques par des boules de grand rayon, comme pour l'arc de cercle. Un comportement similaire se retrouve pour des ensembles « droits » en dimension supérieure, avec par exemple des portions de plan pour  $s = 2$ , comme nous le verrons dans l'exemple 2.1.

Ceci motive la définition suivante, introduite pour la première fois dans [4].

DÉFINITION 1.7. Soit  $0 \leq s < +\infty$ . On dit qu'un ensemble borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  est  $s$ -droit lorsque

$$\mathcal{H}_\infty^s(E) = \mathcal{H}^s(E) < +\infty.$$

Les ensembles  $s$ -droits sont donc des ensembles particuliers, dont la mesure et le contenu de Hausdorff coïncident. Cependant, dans son article de 2002, Delaware a montré le résultat suivant, qui s'avère assez surprenant [1, Theorem 5].

THÉORÈME 1.8. Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $E \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie, alors il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $E_n$  est  $s$ -droit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .

Ce théorème est un exemple de *théorème de décomposition*, qui permet de subdiviser un ensemble en sous-ensembles sur lesquels une mesure se comporte de manière plus simple. Ici, le théorème exprime le fait assez contre-intuitif que tout ensemble borélien de  $\mathbb{R}^N$  dont la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle est finie peut être partitionné en sous-ensembles  $s$ -droits. Il convient cependant de mentionner que les sous-ensembles  $s$ -droits en question sont loin d'être aussi simples que des segments ou des portions de plan. Ils ont plutôt l'apparence d'ensembles de Cantor.

Nous arrivons à présent à l'objectif de ce travail. En nous basant sur la stratégie suivie par Delaware dans son article, nous allons démontrer un théorème de décomposition plus général. Pour bien en comprendre l'énoncé, il est utile de rappeler la notion de *mesure*. Comme son nom l'indique, le but de ce concept est de mesurer la taille des ensembles, et nous voulons le faire de manière additive. Pour cela, il nous faut une classe convenable d'ensembles mesurables. Dans ce travail, on se restreint aux mesures liées à la topologie sur  $\mathbb{R}^N$ .

DÉFINITION 1.9. La tribu de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ , notée  $\mathcal{B}$ , est la plus petite collection d'ensembles de  $\mathbb{R}^N$  vérifiant les propriétés suivantes.

- (1) Pour tout ouvert  $E \subset \mathbb{R}^N$ ,  $E \in \mathcal{B}$ .
- (2) Si  $E \in \mathcal{B}$ , alors  $\mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{B}$ .
- (3) Si  $E_n \in \mathcal{B}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathcal{B}$ .

Nous admettrons qu'une telle famille existe, le lecteur pourra consulter [3, Section 1.2] pour plus de détails. Les éléments de cette collection sont appelés les *boréliens*.

DÉFINITION 1.10. Une mesure de Borel – ou mesure borélienne – sur  $\mathbb{R}^N$  est une application  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

$$(1) \mu(\emptyset) = 0,$$

(2) si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de boréliens disjoints, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Une mesure de Borel  $\mu$  est dite finie lorsqu'elle ne prend que des valeurs finies, et  $\sigma$ -finie lorsque  $\mathbb{R}^N$  est l'union dénombrable de boréliens de mesure  $\mu$  finie. On note  $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  l'ensemble des mesures de Borel finies sur  $\mathbb{R}^N$ .

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème de décomposition.

THÉORÈME 1.11. Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $\mu$  est une mesure de Borel  $\sigma$ -finie sur  $\mathbb{R}^N$  telle que  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , alors il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$ ,

$$\mu(E_n \cap A) \leq \mathcal{H}_\infty^s(A).$$

Remarquons que, l'inégalité  $\mathcal{H}_\infty^s \leq \mathcal{H}^s$  étant toujours vérifiée, un ensemble  $s$ -droit est un ensemble borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  vérifiant

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}_\infty^s(E) < +\infty,$$

et nous montrerons qu'alors

$$\mathcal{H}^s(E \cap A) \leq \mathcal{H}_\infty^s(A)$$

pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$ . Dans notre théorème de décomposition, c'est la même inégalité qui apparaît,  $\mathcal{H}^s$  (ou plutôt sa restriction à  $E$ ) étant remplacée par une mesure de Borel  $\mu$  quelconque. Cette observation indique que le théorème que nous allons étudier est bien une généralisation de celui démontré par Delaware, et les mesures vérifiant la relation  $\mu \leq \mathcal{H}_\infty^s$  jouent un rôle analogue à celui des ensembles  $s$ -droits.

Comme nous pourrions le voir dans les exemples, la détermination de la mesure de Hausdorff d'un ensemble peut s'avérer particulièrement fastidieuse, même pour des ensembles fort simples. En revanche, le contenu de Hausdorff satisfait à une estimation très simple. Pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$  et pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ , nous avons l'inégalité

$$\mathcal{H}_\infty^s(E \cap B_r(x)) \leq \omega_s r^s,$$

obtenue en recouvrant  $E \cap B_r(x)$  par  $B_r(x)$ . L'inégalité fournie par le théorème 1.11 se réexprime donc comme

$$\mu(E_n \cap B_r(x)) \leq \omega_s r^s$$

pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . Ce théorème permet donc, à partir de l'estimation  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  qui semble assez difficile à étudier, d'obtenir une décomposition satisfaisant à une estimation beaucoup plus explicite.

À présent, nous allons temporairement laisser de côté ce théorème pour revenir à une étude plus approfondie de la mesure et du contenu de Hausdorff. L'objectif sera d'améliorer notre compréhension de ces deux concepts et de préparer tous les outils nécessaires à la démonstration du théorème de décomposition.

## 2. Propriétés de la mesure de Hausdorff

Dans cette section, nous étudions plus en détail les propriétés de la mesure et du contenu de Hausdorff. L'objectif est de nous familiariser avec ces deux notions, d'en comprendre le comportement, et de préparer les outils nécessaires à la démonstration du théorème de décomposition.

**2.1. Propriétés des capacités.** On commence par aborder les propriétés, souvent élémentaires, qui sont satisfaites par toutes les capacités de Hausdorff.

**PROPOSITION 1.12 (Monotonie).** *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . Si  $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(B)$ . En particulier,  $\mathcal{H}_\infty^s(A) \leq \mathcal{H}_\infty^s(B)$ , et  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$  en passant à la limite.*

**DÉMONSTRATION.** L'affirmation est une conséquence directe du fait que tous les recouvrements de  $B$  par des boules ouvertes de rayon au plus  $\delta$  sont également des recouvrements de  $A$ .  $\square$

**DÉFINITION 1.13.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^N$ . Une application  $T : E \rightarrow \mathbb{R}^M$  est une isométrie lorsque pour tous  $x, y \in E$ ,  $\|T(y) - T(x)\| = \|y - x\|$ .*

Observons que toute isométrie est nécessairement injective. En effet, si  $T(x) = T(y)$ , alors  $\|y - x\| = 0$ , et donc  $x = y$ .

**PROPOSITION 1.14 (Isométries).** *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . Soient  $E \subset \mathbb{R}^N$  et  $T : E \rightarrow \mathbb{R}^M$  une isométrie. Alors,  $\mathcal{H}_\delta^s(T(E)) = \mathcal{H}_\delta^s(E)$ . En particulier,  $\mathcal{H}_\infty^s(T(E)) = \mathcal{H}_\infty^s(E)$ , et  $\mathcal{H}^s(T(E)) = \mathcal{H}^s(E)$  en passant à la limite.*

DÉMONSTRATION. Supposons que

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

est un recouvrement de  $E$  par des boules de rayon au plus  $\delta$ . Pour tout  $y \in T(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $T(x) = y$ . Or, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in B_{r_n}(x_n)$ . Mais alors,  $\|y - T(x_n)\| = \|x - x_n\| \leq r_n$ , d'où  $y \in B_{r_n}(T(x_n))$ . Donc,

$$T(E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(T(x_n)),$$

ce qui indique que

$$\mathcal{H}_\delta^s(T(E)) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

De manière absolument analogue, si

$$T(E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

est un recouvrement de  $T(E)$  par des boules de rayon au plus  $\delta$ , on vérifie qu'en prenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y_n$  l'unique élément de  $E$  tel que  $T(y_n) = x_n$ , on a

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(y_n),$$

et alors

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \mathcal{H}_\delta^s(T(E)).$$

L'égalité voulue suit de la combinaison de ces deux inégalités.  $\square$

DÉFINITION 1.15. *L'homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}$  et de centre  $c \in \mathbb{R}^N$  est l'application  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  définie pour  $x \in \mathbb{R}^N$  par*

$$T(x) = c + \lambda(x - c).$$

PROPOSITION 1.16 (Homothéties). *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . Soient  $E \subset \mathbb{R}^N$  et  $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  l'homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}_*$  et de centre  $c \in \mathbb{R}^N$ . Alors,  $\mathcal{H}_{|\lambda|\delta}^s(T(E)) = |\lambda|^s \mathcal{H}_\delta^s(E)$ . En particulier,  $\mathcal{H}_\infty^s(T(E)) = |\lambda|^s \mathcal{H}_\infty^s(E)$ , et  $\mathcal{H}^s(T(E)) = |\lambda|^s \mathcal{H}^s(E)$  en passant à la limite.*

DÉMONSTRATION. Supposons que

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

est un recouvrement de  $E$  par des boules de rayon au plus  $\delta$ . Pour tout  $y \in T(E)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = c + \lambda(x - c)$ . Or, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in B_{r_n}(x_n)$ . Mais dans ce cas,

$$\|y - T(x_n)\| = \|c + \lambda(x - c) - c - \lambda(x_n - c)\| = |\lambda| \|x - x_n\| \leq |\lambda| r_n.$$

Donc,

$$T(E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{|\lambda|r_n}(T(x_n)).$$

Puisque nous avons  $|\lambda|r_n \leq |\lambda|\delta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous obtenons l'estimation

$$\mathcal{H}_{|\lambda|\delta}^s(T(E)) \leq |\lambda|^s \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s.$$

Passant à l'infimum sur de tels recouvrements, il vient

$$\mathcal{H}_{|\lambda|\delta}^s(T(E)) \leq |\lambda|^s \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

En faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on a  $|\lambda|\delta \rightarrow 0$ , et alors

$$\mathcal{H}^s(T(E)) \leq |\lambda|^s \mathcal{H}^s(E).$$

L'autre inégalité est prouvée de manière analogue, et la conclusion suit.  $\square$

Les propriétés qui précèdent, bien que des conséquences assez directes de la définition, sont assez rassurantes. En effet, il s'agit de propriétés qu'on attend intuitivement de toute notion de volume, et constater qu'elles sont satisfaites par les capacités nous conforte dans l'idée que nous avons défini une bonne notion.

**EXEMPLE 1.17.** Nous avons vu à l'exemple 1.5 que le segment unité dans  $\mathbb{R}^2$  est 1-droit et de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle égale à 1. En utilisant des isométries et des homothéties, on en déduit que tout segment fermé dans  $\mathbb{R}^N$  est  $s$ -droit et de mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle égale à sa longueur.

Ensuite, à l'aide d'inclusions du type

$$[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset ]a, b[ \subset [a, b],$$

on étend le résultat aux segments ouverts et semi-ouverts par monotonie, en faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La propriété suivante est un prélude à l'additivité de la mesure de Hausdorff. Elle formalise un comportement que nous avons déjà observé dans l'exemple 1.6, à savoir que les capacités séparent les ensembles suffisamment éloignés.

**PROPOSITION 1.18.** *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . Si  $E, F \subset \mathbb{R}^N$  sont tels que  $d(E, F) \geq 2\delta$ , où  $d(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\}$  désigne la distance entre  $E$  et  $F$ , alors  $\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F)$ .*

DÉMONSTRATION. L'inégalité  $\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F)$  est une conséquence du fait que la combinaison de recouvrements de  $E$  et de  $F$  forme un recouvrement de  $E \cup F$ .

Pour l'autre inégalité, soit

$$E \cup F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

un recouvrement de  $E \cup F$  par des boules ouvertes de rayon au plus  $\delta$ . Notons  $J$  l'ensemble des indices  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquels  $E \cap B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$  et  $J'$  l'ensemble des indices  $n \in \mathbb{N}$  pour lesquels  $F \cap B_{r_n}(x_n) \neq \emptyset$ . Par l'hypothèse  $d(E, F) \geq 2\delta$ ,  $J \cap J' = \emptyset$ . En outre, l'ensemble des boules indexées par  $J$  et par  $J'$  forme respectivement un recouvrement de  $E$  et de  $F$ . Dès lors,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{n \in J} \omega_s r_n^s + \sum_{n \in J'} \omega_s r_n^s \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s.$$

En passant à l'infimum sur de tels recouvrements, l'autre inégalité suit, et la proposition est démontrée.  $\square$

Pour compléter cette revue des propriétés satisfaites par les capacités et la mesure de Hausdorff, nous allons montrer qu'elles sont sous-additives.

PROPOSITION 1.19 (Sous-additivité). *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $0 < \delta \leq +\infty$ . Si  $E_n \subset \mathbb{R}^N$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors*

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n)$$

et

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , utilisons la définition de l'infimum pour extraire un recouvrement de  $E_n$  par des boules de rayon au plus  $\delta$

$$E_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{r_{k,n}}(x_{k,n})$$

tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_s r_{k,n}^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Comme  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est dénombrable, on peut considérer  $(B_{r_j}(x_j))_{j \in \mathbb{N}}$  une énumération de  $\{B_{r_{k,n}}(x_{k,n})\}_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ . Dès lors, en utilisant le fait qu'on peut toujours réarranger une série à termes positifs,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j\right) &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \omega_s r_j^s = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_s r_{k,n}^s \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \mathcal{H}_\delta^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(E_n) \right) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque  $\varepsilon > 0$  est arbitraire, la conclusion suit pour les capacités.

Enfin, comme  $\mathcal{H}_\delta^s(E_n) \leq \mathcal{H}^s(E_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\delta > 0$ , on peut écrire

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_n).$$

Il ne reste plus qu'à faire  $\delta \rightarrow 0$  pour conclure pour la mesure de Hausdorff.  $\square$

Nous avons donc vu que les capacités jouissent déjà d'un bon nombre de propriétés que nous souhaitons pour la mesure de Hausdorff. La seule obstruction est le manque d'additivité, comme illustré dans l'exemple 1.6.

Concluons par un exemple de comportement des capacités qui n'est pas partagé par la mesure de Hausdorff. Nous allons montrer que les capacités sont *localement finies*.

**EXEMPLE 1.20.** Soient  $0 \leq s < +\infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$  et  $K \subset \mathbb{R}^N$  un compact. Nous allons montrer que  $\mathcal{H}_\delta^s(K) < +\infty$ . Pour cela, observons que la compacité de  $K$  nous permet de trouver un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon  $\delta$ ,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^m B_\delta(x_k).$$

Par définition, on a alors

$$\mathcal{H}_\delta^s(K) \leq \sum_{k=1}^m \omega_s \delta^s < +\infty.$$

**2.2. Additivité de la mesure de Hausdorff.** Nous allons voir que la mesure de Hausdorff est une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ , ce qui garantit qu'elle est bien additive sur la famille des boréliens. Nous omettrons la preuve, pour nous concentrer sur quelques applications de ce résultat.

Mais avant, nous montrons une propriété d'additivité intermédiaire, qui est la continuation de la proposition 1.18.

**PROPOSITION 1.21.** Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Soient  $E, F \subset \mathbb{R}^N$  tels que  $d(E, F) > 0$ . Alors,  $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$ .

**DÉMONSTRATION.** En vertu de la proposition 1.18, pour tout  $0 < \delta \leq \frac{1}{2}d(E, F)$ , nous avons

$$\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

La conclusion suit en passant à la limite  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$

À ce stade, nous disposons de tous les ingrédients nécessaires pour montrer que la mesure de Hausdorff est une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ . Néanmoins, la preuve requiert l'usage de notions de théorie de la mesure comme le *théorème de Carathéodory* et les *mesures extérieures métriques*. Pour ne pas nous éloigner du sujet en développant ces concepts, nous nous contentons de présenter le résultat sans démonstration. La preuve, ainsi que toutes les notions nécessaires pour y parvenir, se trouvent en annexe.

PROPOSITION 1.22. *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Alors,  $\mathcal{H}^s$  est une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ .*

Mentionnons tout de même qu'il fait bien sens de considérer  $\mathcal{H}^s(E)$  pour n'importe quel  $E \subset \mathbb{R}^N$ , mais que pour utiliser les propriétés des mesures pour  $\mathcal{H}^s$ , nous devons nous restreindre aux boréliens.

On donne une application géométrique de l'additivité.

EXEMPLE 1.23. Soit  $E$  un polygone dans  $\mathbb{R}^N$ . Alors,  $\mathcal{H}^1(E)$  correspond à la longueur du polygone – son périmètre. En effet, tout polygone s'écrit comme l'union disjointe de ses côtés, si on les écrit comme des segments demi-ouverts. L'affirmation suit alors de la propriété d'additivité appliquée avec l'exemple 1.17.

Il s'agit d'un nouvel exemple qui nous conforte dans l'idée que la mesure de Hausdorff est bien la notion que nous souhaitons.

Cette propriété d'additivité va également nous permettre de constater que, contrairement aux capacités – voir exemple 1.20 –, la mesure de Hausdorff n'est en général pas localement finie. Cet exemple constitue une prolongation de 1.4.

EXEMPLE 1.24. Posons  $E = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Nous allons voir que  $\mathcal{H}^1(E) = +\infty$ . Pour cela, définissons pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$  le segment  $A_n = [0, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$ . Nous savons de l'exemple 1.17 que

$$\mathcal{H}^1(A_n) = 1.$$

Or, les  $A_n$  sont disjoints, et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_*} A_n \subset E$ . Dès lors, l'additivité et la monotonie de la mesure de Hausdorff assurent que

$$\mathcal{H}^1(E) \geq \mathcal{H}^1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}_*} \mathcal{H}^1(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}_*} 1 = +\infty.$$

De cela, nous pouvons déduire en utilisant des isométries et des homothéties que tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  est de mesure  $\mathcal{H}^1$  infinie.

Cet exemple illustre une fois encore que l'inégalité  $\mathcal{H}_\infty^s \leq \mathcal{H}^s$  est généralement stricte, et qu'on ne peut pas espérer avoir un contrôle de l'écart entre les deux quantités. En effet, en utilisant  $\mathcal{H}_\infty^s(B_r(x)) \leq \omega_s r^s$ , nous pouvons construire des ensembles de capacité de Hausdorff arbitrairement réduite, mais de mesure de Hausdorff infinie. Il suffit par exemple, pour  $s = 1$ , de choisir une boule ouverte de petit rayon, comme nous l'avons fait pour l'exemple 1.4, puisque nous avons vu que les ouverts de  $\mathbb{R}^2$  sont de mesure  $\mathcal{H}^1$  infinie.

Nous concluons en étudiant un cas où, en contraste avec ce que nous venons de voir, la capacité de Hausdorff permet de contrôler la mesure de Hausdorff. L'énoncé est issu de [7, Appendix B].

**PROPOSITION 1.25.** *Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $E \subset \mathbb{R}^N$ . Si  $\mathcal{H}_\infty^s(E) = 0$ , alors  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\delta > 0$ . Comme  $\omega_s > 0$ , par définition de l'infimum, on peut trouver un recouvrement de  $E$

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s \leq \omega_s \delta^s.$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n \leq \delta$ . Donc, le recouvrement rentre dans le calcul de  $\mathcal{H}_\delta^s$ , ce qui montre que

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \omega_s \delta^s.$$

Si  $s \neq 0$ , on fait  $\delta \rightarrow 0$  pour conclure. Si  $s = 0$ , il suffit de remarquer que le seul ensemble de contenu  $\mathcal{H}_\infty^0$  nul est l'ensemble vide, qui est également de mesure  $\mathcal{H}^0$  nulle.  $\square$

Cette proposition illustre le fait que, pour identifier les ensembles de mesure de Hausdorff nulle, le contenu suffit. Nous constatons donc que, bien que ce soit la mesure de Hausdorff qui possède toutes les bonnes propriétés que nous souhaitons, il est souvent plus agréable de travailler avec le contenu, car il est plus facile à manipuler et permet déjà d'obtenir un certain nombre d'informations liées à la mesure.

**2.3. Quelques valeurs de  $s$  particulières.** Nous nous intéressons ici à quelques valeurs de  $s$  pour lesquelles le comportement de  $\mathcal{H}^s$  est particulier.

On commence par montrer que, si  $s = 0$ , alors  $\mathcal{H}^s$  compte simplement le nombre d'éléments dans les ensembles. Intuitivement, cela correspond au fait que les points sont des objets de dimension 0.

PROPOSITION 1.26. *La mesure de Hausdorff 0-dimensionnelle  $\mathcal{H}^0$  coïncide avec la mesure de comptage sur  $\mathbb{R}^N$ , autrement dit, pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{H}^0(E)$  est le nombre d'éléments de  $E$  si  $E$  est fini, et  $+\infty$  si  $E$  est infini.*

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in \mathbb{R}^N$ . Si

$$\{x\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

est un recouvrement du singleton  $\{x\}$  par des boules, alors nécessairement il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $r_m > 0$ . Alors,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_0 r_n^0 \geq r_m^0 = 1.$$

D'autre part, pour tout  $\delta > 0$ ,  $\{x\} \subset B_\delta(x)$ , avec  $\omega_0 \delta^0 = 1$ . Il est aisé d'en déduire que  $\mathcal{H}_\delta^0(\{x\}) = 1$  pour tout  $0 < \delta \leq +\infty$ , et donc que  $\mathcal{H}^s(\{x\}) = 1$  en passant à la limite  $\delta \rightarrow 0$ . Nous avons donc montré que la mesure  $\mathcal{H}^0$  de tout singleton est 1.

Si  $E \subset \mathbb{R}^N$  est fini ou dénombrable infini, l'affirmation suit du fait que les singletons sont des boréliens et de l'additivité de la mesure. Si  $E$  est infini, il contient un sous-ensemble dénombrable infini, et on conclut par monotonie.  $\square$

Un autre cas où le comportement de  $\mathcal{H}^s$  est assez simple, et même trivial, est le cas  $s > N$ . Dans ce cas,  $\mathcal{H}^s$  s'annule identiquement. Ceci illustre le fait intuitif qu'il n'existe pas d'ensemble de dimension supérieure à celle de l'espace ambiant.

PROPOSITION 1.27. *Si  $s > N$ , alors  $\mathcal{H}^s$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^N$ .*

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que  $\mathcal{H}^s([0, 1]^N) = 0$ . Pour cela, observons que pour tout  $n \in \mathbb{N}_*$ ,  $[0, 1]^N$  est recouvert par  $n^N$  cubes fermés de côté  $\frac{1}{n}$ , eux-mêmes recouverts par des boules de rayon  $\theta \sqrt{N} \frac{1}{n}$ , pour  $\theta > 1$  fixé. Dès lors, pour  $0 < \delta \leq +\infty$ , si  $\theta \sqrt{N} \frac{1}{n} \leq \delta$ , on a par définition

$$\mathcal{H}_\delta^s([0, 1]^N) \leq \sum_{j=1}^{n^N} \omega_s \left( \theta \sqrt{N} \frac{1}{n} \right)^s = \omega_s \theta^s \sqrt{N}^s n^{N-s}.$$

Comme  $N - s < 0$ , en faisant  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que

$$\mathcal{H}_\delta^s([0, 1]^N) = 0$$

pour tout  $0 < \delta \leq +\infty$ , et donc

$$\mathcal{H}^s([0, 1]) = 0.$$

À présent, comme  $\mathbb{R}^N$  est recouvert par un nombre dénombrable de cubes de côté 1, on déduit de l'invariance par translation et de la sous-additivité de  $\mathcal{H}^s$  que

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) = 0.$$

Par monotonie, on en conclut que

$$\mathcal{H}^s(E) = 0$$

pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$ . □

Un cas moins trivial, mais particulièrement intéressant, est le cas où  $s = N$ . Dans ce cas, la mesure de Hausdorff coïncide avec la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$ .

Un avantage de notre définition est de rendre cette équivalence assez transparente. En effet, avec la définition basée sur le diamètre, un facteur de normalisation apparaît. En outre, la preuve nécessite alors de recourir à l'*inégalité isodiamétrique*, qui affirme que, à diamètre fixé, l'ensemble de plus grand volume est la boule. Ce résultat, bien qu'intuitivement clair, est assez délicat à démontrer. Le lecteur pourra consulter [2] ou [3] pour plus de détails.

Un dernier exemple est celui des surfaces paramétrées. En géométrie différentielle, on définit le volume des surfaces paramétrées par des fonctions différentiables via une intégrale – voir par exemple [6, Chapitre 4]. Ceci fournit une définition fort pratique à manipuler, mais restreinte aux ensembles qui peuvent être paramétrés par des fonctions différentiables. La mesure de Hausdorff, quant à elle, est définie pour tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$ . Nous allons voir que sur les surfaces paramétrées, les deux notions coïncident. Donc, la mesure de Hausdorff est cohérente avec cette notion de volume des surfaces.

Commençons par un exemple, qui capture bien l'intuition de ce qui se passe. Nous allons calculer la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1$  de l'arc de cercle. Ceci nous permettra par la même occasion de formaliser l'exemple illustré avec lequel nous avons commencé ce travail. Pour cela, nous aurons besoin de la notion d'uniforme différentiabilité [8, Définition 6.83].

**DÉFINITION 1.28.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . On dit que  $f$  est uniformément différentiable sur  $I$  lorsque  $f$  est différentiable sur  $I$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $x, y \in I$ , si  $x \neq y$  et  $|y - x| \leq \delta$ ,

$$\left\| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

La différentiabilité uniforme est l'analogie de la continuité uniforme pour la différentiabilité. On a la proposition suivante, énoncée et démontrée dans [8, Proposition 6.84] pour le cas des fonctions réelles. L'extension aux fonctions à valeurs vectorielles est aisée, et nous omettons donc la preuve.

**PROPOSITION 1.29.** *Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Si  $I$  est compact, alors  $f$  est uniformément dérivable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est continûment dérivable sur  $I$ .*

Nous aurons également besoin d'un lemme technique, dont nous omettons la preuve, qui repose sur la compacité de l'intervalle  $[a, b]$ .

**LEMME 1.30.** *Soient  $a < b$ . Supposons que  $\{E_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement de  $[a, b]$  par des ouverts. Alors, il existe  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$  tels que pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , il existe  $i_j \in I$  tel que  $[t_{j-1}, t_j] \subset E_{i_j}$ .*

Nous pouvons à présent aborder notre exemple.

**EXEMPLE 1.31.** Dans cet exemple, nous calculons la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle de l'arc de cercle. Soit  $E = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$ . Nous allons montrer que

$$\mathcal{H}^1(E) = \pi.$$

Pour cela, il nous sera utile de définir la paramétrisation

$$\gamma : [0, \pi] \rightarrow E, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

On observe que  $\gamma$  est bijective et continue, et donc un homéomorphisme car  $[0, \pi]$  est compact. En outre,  $\gamma$  est continûment dérivable sur  $[0, \pi]$  avec

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\gamma'(t)\| = 1$$

pour tout  $t \in [0, \pi]$ . Comme  $[0, \pi]$  est compact, il suit que  $\gamma$  est uniformément dérivable.

Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\theta > 1$ . Choisissons une suite  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \pi$  telle que  $|t_j - t_{j-1}| \leq \varepsilon$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Soient  $x_j$  le milieu du segment  $[\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j)]$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $B_j$  la boule ouverte centrée en  $x_j$  de rayon  $r_j = \frac{\theta}{2} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ . Un exercice de trigonométrie élémentaire nous révèle que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^k B_j.$$

Soit  $0 < \delta \leq +\infty$  et choisissons, en utilisant la continuité uniforme de  $\gamma$ ,  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que  $r_j \leq \delta$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Alors, par définition,

$$\mathcal{H}_\delta^1(E) \leq \theta \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

Soit  $\eta > 0$ . En vertu de la dérivabilité uniforme de  $\gamma$ , nous pouvons de plus réduire  $\varepsilon$  pour que

$$\left\| \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} - \gamma'(t_{j-1}) \right\| \leq \eta$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Alors, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$(*) \quad \mathcal{H}_\delta^1(E) \leq \theta \sum_{j=1}^k [\|\gamma'(t_{j-1})\| + \eta](t_j - t_{j-1}) = \theta(\pi + \eta).$$

Comme  $\eta > 0$  et  $\theta > 1$  sont arbitraires, on en conclut que

$$\mathcal{H}_\delta^1(E) \leq \pi,$$

et donc, en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient

$$\mathcal{H}^1(E) \leq \pi.$$

Tournons-nous à présent vers l'autre inégalité. Soient  $0 < \delta \leq +\infty$  et

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

un recouvrement de  $E$  par des boules de rayon au plus  $\delta$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma^{-1}(E \cap B_{r_n}(x_n))$  est un ouvert, et ces ouverts recouvrent  $[0, \pi]$  quand  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ . On peut donc appliquer le lemme 1.30 pour obtenir  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \pi$  tels que pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , il existe  $n_j \in \mathbb{N}$  tel que  $\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j) \in B_{r_{n_j}}(x_{n_j})$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , et prenons  $\eta > 0$  associé dans la définition de dérivabilité uniforme pour  $\gamma'$ . Comme  $\gamma$  est un homéomorphisme et  $E$  est compact, si  $\delta$  est suffisamment réduit,  $|t_j - t_{j-1}| \leq \eta$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Dès lors, comme pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$  on a  $2r_{n_j} \geq \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ , on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_1 r_n \geq \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

L'inégalité triangulaire entraîne que

$$(*) \quad \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \geq (\|\gamma'(t_{j-1})\| - \eta)(t_j - t_{j-1}) = (1 - \eta)(t_j - t_{j-1})$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ , et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_1 r_n \geq \pi(1 - \eta).$$

Le recouvrement étant arbitraire, en passant à l'infimum, il vient pour un tel choix de  $\delta$

$$\mathcal{H}_\delta^1(E) \geq \pi(1 - \eta).$$

Comme  $\eta > 0$  est arbitraire, en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on en conclut que

$$\mathcal{H}^1(E) \geq \pi.$$

Les deux inégalités étant démontrées, l'égalité annoncée suit.

Remarquons que les quantités impliquées dans les équations (\*) rappellent celles qui apparaissent dans le calcul de l'intégrale

$$\int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt,$$

qui permet de calculer la longueur de l'arc de cercle. On peut généraliser cela. On a le résultat suivant [3, Theorem 11.25]. Nous n'allons pas le démontrer, la preuve étant particulièrement technique et n'apportant pas d'intuition supplémentaire à celle de l'exemple qui précède.

**PROPOSITION 1.32.** *Soit  $M$  une sous-variété  $k$ -dimensionnelle de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^N$  paramétrisée par  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Si  $A \subset V$  est un borélien, alors  $f(A) \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien et*

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A \sqrt{\det((Df(x))^* \circ Df(x))} dx.$$

Ce résultat nous indique que la mesure de Hausdorff coïncide avec le volume des sous-variétés différentielles de  $\mathbb{R}^N$  tel que défini en géométrie différentielle.

**2.4. Un mot sur la dimension.** Jusqu'ici, nous avons toujours calculé la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  des ensembles que nous avons considérés dans nos exemples pour une seule valeur de  $s$ , celle qui nous semblait intuitivement convenir à l'ensemble étudié. Nous n'avons jamais essayé de mesurer  $\mathcal{H}^s$  sur un même ensemble pour deux valeurs différentes de  $s$ . Le résultat suivant révèle un comportement général lorsqu'on choisit un  $s$  « mal adapté » à l'ensemble mesuré.

**PROPOSITION 1.33.** *Soient  $E \subset \mathbb{R}^N$  et  $0 \leq s < +\infty$ . Supposons que*

$$\mathcal{H}^s(E) < +\infty.$$

*Alors, pour tout  $t > s$ ,*

$$\mathcal{H}^t(E) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Fixons  $0 < \delta \leq +\infty$  et considérons

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

un recouvrement de  $E$  par des boules de rayon au plus  $\delta$ . On calcule

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_t r_n^t \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \delta^{t-s} \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s.$$

Passant à l'infimum sur de tels recouvrements, il vient

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \frac{\omega_t}{\omega_s} \delta^{t-s} \mathcal{H}^s(E).$$

Comme  $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ , la propriété de comparaison pour la limite permet de conclure, en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , que  $\mathcal{H}^t(E) \leq 0$  et donc  $\mathcal{H}^t(E) = 0$ .  $\square$

Nous déduisons de cette proposition que, si  $E \subset \mathbb{R}^N$  et  $0 \leq s < +\infty$  sont tels que

$$\mathcal{H}^s(E) > 0,$$

alors pour tout  $0 \leq t < s$ ,

$$\mathcal{H}^t(E) = +\infty.$$

En effet, si il existait un  $0 \leq t < s$  tel que  $\mathcal{H}^t(E) < +\infty$ , alors en appliquant la proposition qui précède, on trouverait  $\mathcal{H}^s(E) = 0$ , une contradiction.

Dès lors, pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$ , il existe un unique  $0 \leq s < +\infty$  tel que

$$\mathcal{H}^t(E) = +\infty$$

pour tout  $0 \leq t < s$  et

$$\mathcal{H}^t(E) = 0$$

pour tout  $t > s$ . Nous voyons donc que, pour tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ , il existe une unique valeur de  $s$  « adaptée » à ce sous-ensemble. Ceci nous donne un moyen de *définir* un terme que nous avons jusqu'ici utilisé de manière assez vague, la *dimension*. En effet, étant donné  $E \subset \mathbb{R}^N$ , si  $0 \leq s < +\infty$  est tel que décrit ci-haut, on peut poser

$$s = \dim_{\mathcal{H}}(E),$$

et on appelle cette quantité *dimension de Hausdorff de  $E$* .

Nous ne donnerons pas davantage de détails pour ne pas nous éloigner de notre sujet, mais il est tout de même intéressant de savoir que la mesure de Hausdorff permet de donner une définition de dimension, valide pour tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$ .

## Le théorème de décomposition

À présent que nous avons étudié en détail la mesure de Hausdorff, nous pouvons nous diriger vers le théorème de décomposition. Avant toute chose, il nous faut parler plus en détail des ensembles  $s$ -droits.

### 1. Ensembles et mesures $s$ -droits

L'objectif de cette section est d'étudier les ensembles  $s$ -droits, et de définir la notion plus générale de *mesure  $s$ -droite*, qui intervient dans le théorème de décomposition. On rappelle que, d'après la définition 1.7, un ensemble borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  est dit  $s$ -droit lorsque

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}_\infty^s(E) < +\infty.$$

Il est également utile de rappeler qu'un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  est  $s$ -droit si et seulement si

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}_\infty^s(E) < +\infty,$$

l'autre inégalité étant toujours vérifiée.

Nous avons vu que le segment est un ensemble 1-droit. L'exemple suivant achève de nous convaincre que cette terminologie est bien choisie.

**EXEMPLE 2.1.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Soient  $F$  un sous-espace affine  $k$ -dimensionnel de  $\mathbb{R}^N$  et  $E \subset F$  un borélien de mesure  $\mathcal{H}^k$  finie. Alors,  $E$  est  $k$ -droit.

En effet, comme  $F$  est un sous-espace affine  $k$ -dimensionnel, il existe une isométrie bijective  $T : F \rightarrow \mathbb{R}^k$ . On déduit de la proposition 1.14 que

$$\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(T(E)), \quad \mathcal{H}_\infty^k(E) = \mathcal{H}_\infty^k(T(E)).$$

Notons  $m_k$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^k$ . Nous savons que  $\mathcal{H}^k(T(E)) = m_k(T(E))$ . En outre, il est aisé de voir que  $m_k(T(E)) \leq \mathcal{H}_\infty^s(T(E))$ . En effet, soit

$$T(E) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$$

un recouvrement de  $T(E)$  par des boules. La sous-additivité et la monotonie de la mesure de Lebesgue assurent que

$$m_k(T(E)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_k r_n^k.$$

Passant à l'infimum, on en déduit que  $m_k(T(E)) \leq \mathcal{H}_\infty^k(T(E))$ .

Combinant ces inégalités, il vient

$$m_k(T(E)) \leq \mathcal{H}_\infty^k(T(E)) \leq \mathcal{H}^k(T(E)) = m_k(T(E)),$$

révélant que  $\mathcal{H}^k(T(E)) = \mathcal{H}_\infty^k(T(E))$ , et donc que  $\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}_\infty^k(E)$ . Comme  $E$  est de mesure  $\mathcal{H}^k$  finie, on en déduit que  $E$  est  $k$ -droit.

Les portions d'espaces affines  $k$ -dimensionnels sont l'exemple même d'ensembles que nous souhaiterions qualifier de  $k$ -droits, et ceci nous montre donc que la définition choisie correspond à notre intuition.

Jusqu'à maintenant, nous n'avons considéré dans nos exemples que des valeurs entières de  $s$ . Il serait cependant dommage de faire une telle limitation, la mesure de Hausdorff étant définie pour toute valeur réelle positive de  $s$ . Aussi, nous présentons un exemple d'ensemble  $s$ -droit pour un  $s$  non entier.

**EXEMPLE 2.2.** Rappelons la définition de l'ensemble de Cantor usuel  $C \subset \mathbb{R}$ . On pose

$$C_0 = [0, 1], \quad C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \quad \dots$$

À chaque étape,  $C_n$  est une union finie d'intervalles fermés disjoints, et on construit par récurrence  $C_{n+1}$  en ôtant à chaque intervalle de  $C_n$  son tiers central. On définit ensuite

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

On trouvera une illustration à la figure 1.

Posons  $s = \log_3 2 \approx 0,63$ . Alors,  $C$  est  $s$ -droit, avec

$$\mathcal{H}^s(C) = \frac{\omega_s}{2^s} = \mathcal{H}_\infty^s(C).$$

On ne donnera pas les détails de ce calcul. Mentionnons simplement que le raisonnement est basé sur le fait que l'ensemble de Cantor est autosimilaire de rapport  $s$ . En effet, chaque  $C_{n+1}$  est l'image de deux  $C_n$  contractés d'un facteur  $1/3$ . Le lecteur trouvera plus de détails dans [2, Theorem 1.14]. Notons cependant que le résultat donné dans cette référence diffère du nôtre d'un facteur de normalisation, ceci étant dû à la différence de définition de  $\mathcal{H}^s$ , comme nous l'avons déjà signalé.

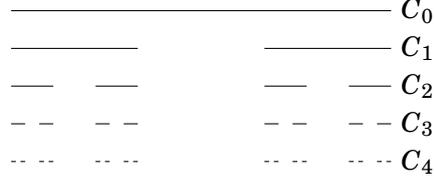


FIGURE 1. Construction de l'ensemble de Cantor usuel

Nous allons à présent établir une caractérisation des ensembles  $s$ -droits qui nous servira à généraliser cette définition. Avant cela, introduisons une notation fort utile, désignant la restriction d'une mesure de Borel sur un sous-ensemble borélien.

**DÉFINITION 2.3.** Soient  $\mu$  une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$  et  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien. On définit la restriction de  $\mu$  à  $E$ , notée  $\mu|_E$ , pour  $A \in \mathcal{B}$  par

$$\mu|_E(A) = \mu(E \cap A).$$

Ceci définit bien une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ .

Nous sommes à présents prêts à établir notre caractérisation. On procède en deux temps. On commence par montrer que la propriété d'être  $s$ -droit est préservée par passage à un sous-ensemble, avant de fournir la caractérisation proprement dite.

**PROPOSITION 2.4.** Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien  $s$ -droit. Alors, tout borélien  $A \subset E$  est  $s$ -droit.

**DÉMONSTRATION.** Prenons un borélien  $A \subset E$ . Par additivité de  $\mathcal{H}^s$  sur les boréliens, nous avons

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(E \setminus A) \geq \mathcal{H}_\infty^s(A) + \mathcal{H}_\infty^s(E \setminus A) \geq \mathcal{H}_\infty^s(E),$$

où la dernière inégalité provient de la sous-additivité de  $\mathcal{H}_\infty^s$ . Mais par hypothèse,  $E$  est  $s$ -droit, ce qui implique que toutes les inégalités ci-haut sont en fait des égalités, et donc que  $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}_\infty^s(A)$ , révélant que  $A$  est  $s$ -droit.  $\square$

**PROPOSITION 2.5.** Soient  $0 \leq s < +\infty$  et  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie. Alors,  $E$  est  $s$ -droit si et seulement si  $\mathcal{H}^s|_E \leq \mathcal{H}_\infty^s$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons pour montrer l'implication directe que  $E$  est  $s$ -droit. Alors, pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$ ,  $E \cap A \subset E$ , et comme  $E \cap A$  est un borélien, on déduit de la proposition qui précède que

$$\mathcal{H}^s|_E(A) = \mathcal{H}^s(E \cap A) = \mathcal{H}_\infty^s(E \cap A) \leq \mathcal{H}_\infty^s(A).$$

Pour l'implication réciproque, remarquons que si  $\mathcal{H}^s \ll_E \leq \mathcal{H}_\infty^s$ , alors en particulier

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s \ll_E(E) \leq \mathcal{H}_\infty^s(E),$$

ce qui, en vertu de la remarque qui précède, suffit pour conclure car  $E$  est de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie.  $\square$

Cette proposition motive une nouvelle définition, qui généralise la relation  $\mathcal{H}^s \ll_E \leq \mathcal{H}_\infty^s$  à d'autres mesures.

**DÉFINITION 2.6.** Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  et  $0 \leq s < +\infty$ . On dit que  $\mu$  est  $s$ -droite lorsque  $\mu \leq \mathcal{H}_\infty^s$ .

Cette définition est bien cohérente avec la définition 1.7 puisque dans le cas où  $E \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie, la proposition 2.5 assure que  $\mathcal{H}^s \ll_E$  est une mesure de Borel finie  $s$ -droite si et seulement si  $E$  est  $s$ -droit.

La proposition suivante généralise [1, Theorem 1] à notre nouvelle définition. Elle constitue une caractérisation fort utile des ensembles et mesures  $s$ -droits.

**PROPOSITION 2.7.** Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  et  $0 \leq s < +\infty$ . Alors,  $\mu$  est  $s$ -droite si et seulement si

$$\mu(B_r(x)) \leq \omega_s r^s$$

pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . En particulier, un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie est  $s$ -droit si et seulement si

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq \omega_s r^s$$

pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ .

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin de deux propriétés élémentaires des mesures de Borel, que nous rappelons sans preuve [3, Theorem 1.8].

**PROPOSITION 2.8.** Soit  $\mu$  une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ .

(Monotonie) Si  $E, F \subset \mathbb{R}^N$  sont deux boréliens tels que  $E \subset F$ , alors

$$\mu(E) \leq \mu(F).$$

(Sous-additivité) Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de boréliens de  $\mathbb{R}^N$ , alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Mentionnons que ces propriétés nous sont familières, nous les avons déjà obtenues pour toutes les capacités de Hausdorff.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.7. Pour l'implication directe, si  $\mu$  est  $s$ -droite, alors pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ ,

$$\mu(B_r(x)) \leq \mathcal{H}_\infty^s(B_r(x)) \leq \omega_s r^s,$$

en considérant le recouvrement de  $B_r(x)$  par elle-même dans la définition de  $\mathcal{H}_\infty^s$ .

Pour l'implication réciproque, l'hypothèse implique que pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$  borélien, si  $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n)$  est un recouvrement de  $E$  par des boules,

$$\mu(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_{r_n}(x_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega_s r_n^s,$$

et il suffit de passer à l'infimum sur de tels recouvrements pour conclure.

La seconde affirmation est une conséquence de l'observation qui suit la définition 2.6 et de la première partie de la proposition.  $\square$

Donnons un exemple de mesure  $s$ -droite autre que  $\mathcal{H}^s|_E$  avec  $E \subset \mathbb{R}^N$   $s$ -droit.

EXEMPLE 2.9. Soient  $0 < s < N$  et  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien de mesure finie arbitraire, et définissons sur  $\mathbb{R}^N$

$$f(x) = \frac{1}{|x|^{N-s}} \chi_E(x).$$

Pour  $A \subset \mathbb{R}^N$  borélien, on définit

$$\lambda_f(A) = \int_A f \, dx.$$

Alors, comme  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^N$ ,  $\lambda_f \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ . Nous allons montrer que  $\lambda_f \leq c \mathcal{H}_\infty^s$  pour une constante  $c > 0$ , et cela montrera que  $\lambda_{c^{-1}f}$  est  $s$ -droite.

Soit  $B_r(a) \subset \mathbb{R}^N$ . On observe que

$$\lambda_f(B_r(a)) \leq \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{N-s}} \, dx.$$

Pour montrer cela, on pourra procéder de la manière suivante. Considérons  $T : B_r(0) \rightarrow B_r(a)$  la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur du segment  $[0, a]$ . La formule du changement de variable entraîne que

$$\lambda_f(B_r(a)) \leq \int_{B_r(a)} \frac{1}{|x|^{N-s}} \, dx = \int_{B_r(0)} \frac{1}{|T(x)|^{N-s}} \, dx.$$

Or,  $T$  laisse invariant  $B_r(0) \cap B_r(a)$ , et envoie les points de  $B_r(0) \setminus B_r(a)$  sur des points hors de  $B_r(0)$ . Dès lors, il est aisé de déduire que

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|T(x)|^{N-s}} dx \leq \int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{N-s}} dx,$$

ce qui montre notre observation. On trouvera une illustration de cette idée sur la figure 2.

La formule d'intégration radiale assure que

$$\int_{B_r(0)} \frac{1}{|x|^{N-s}} dx = N\omega_N \int_0^r \frac{\rho^{N-1}}{\rho^{N-s}} d\rho = N\omega_N \int_0^r \rho^{s-1} d\rho.$$

On déduit du théorème fondamental de l'analyse que

$$\lambda_f(B_r(a)) \leq \frac{N\omega_N}{s} r^s.$$

En prenant  $c = \frac{N\omega_N}{s\omega_s}$ , on obtient

$$\lambda_f(B_r(a)) \leq c\omega_s r^s.$$

Comme la boule  $B_r(a)$  est arbitraire, la proposition qui précède assure que  $\lambda_f \leq c\mathcal{H}_\infty^s$ , comme annoncé.

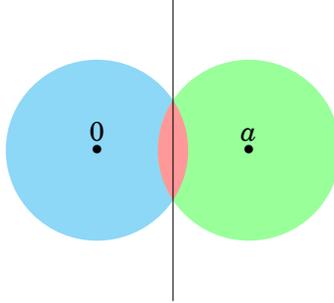


FIGURE 2. Réflexion de  $B_r(0)$  sur  $B_r(a)$

## 2. La démonstration du théorème

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour aborder la démonstration du théorème de décomposition. Avec les définitions que nous avons introduites au cours de ce travail, celui-ci se reformule de la façon suivante.

**THÉORÈME 2.10.** *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $\mu$  est une mesure de Borel  $\sigma$ -finie sur  $\mathbb{R}^N$  telle que  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , alors il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

Comme nous l'avons déjà précisé, il s'agit d'une généralisation du théorème de Delaware [1, Theorem 5], dont nous rappelons l'énoncé.

**THÉORÈME 2.11.** *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $E \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie, alors il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $E_n$  est  $s$ -droit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ .*

Avant de nous lancer dans la preuve, il est instructif de donner quelques exemples. On commence par une application géométrique où la décomposition se trouve de manière immédiate.

**EXEMPLE 2.12.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^N$  un polygone. Nous savons par l'exemple 1.23 que  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ . Comme  $E$  est un borélien, nous pouvons lui appliquer le théorème de Delaware pour le décomposer en ensembles 1-droits disjoints. Dans le cas présent, une décomposition est formée par les côtés de  $E$  – en ajoutant une infinité de fois  $\emptyset$  pour obtenir une suite. Dans cet exemple, le théorème de Delaware correspond donc au fait évident que tout polygone est une union de segments.

Pour notre second exemple, nous allons chercher d'autres mesures que  $\mathcal{H}^s$  pour illustrer le théorème 2.10. Tournons-nous donc à nouveau vers les mesures à densité.

**EXEMPLE 2.13.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ,  $f \geq 0$ , et soit  $\lambda_f$  la mesure de Borel finie associée,

$$\lambda_f(E) = \int_E f \, dx.$$

Soit  $0 \leq s < N$ . Alors,  $\lambda_f$  vérifie les hypothèses du théorème de décomposition. En effet, soit  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien, et notons  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^N$ . Rappelons que  $m = \mathcal{H}^N$ . Alors, soit  $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ , auquel cas  $m(E) = 0$  en vertu de la proposition 1.33, et donc

$$\lambda_f(E) = 0 \leq \mathcal{H}^s(E),$$

soit  $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$ , et dans ce cas

$$\lambda_f(E) \leq +\infty = \mathcal{H}^s(E).$$

Donc,  $\lambda_f \leq \mathcal{H}^s$ . Dès lors, le théorème de décomposition assure l'existence d'une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et

$$\int_{E_n \cap B_r(x)} f \, dy \leq \omega_s r^s$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ .

Nous allons voir que dans ce cas particulier, on peut construire explicitement une décomposition. Par souci de simplicité, on va raisonner dans le cas  $s = 1$ ,  $N = 2$ .

Commençons par supposer que  $f \leq M$  pour un certain  $M > 0$ . Posons  $r_0 = \frac{2}{M\pi}$ . Choisissons  $a \in \mathbb{R}^N$ . Soit  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . Si  $r \leq r_0$ , alors on calcule que

$$\lambda_f \lfloor_{B_{r_0}(a)}(B_r(x)) = \int_{B_r(x) \cap B_{r_0}(a)} f \, dy \leq \int_{B_r(x)} M \, dy = M\pi r^2 \leq 2r = \omega_1 r.$$

Si  $r \geq r_0$ , alors on calcule que

$$\lambda_f \lfloor_{B_{r_0}(a)}(B_r(x)) = \int_{B_r(x) \cap B_{r_0}(a)} f \, dy \leq \int_{B_{r_0}(a)} M \, dy = M\pi(r_0)^2 = 2r_0 \leq \omega_1 r.$$

Donc, dans tous les cas,

$$\lambda_f \lfloor_{B_{r_0}(a)}(B_r(x)) \leq \omega_1 r,$$

et alors la proposition 2.7 assure que  $\lambda_f \lfloor_{B_{r_0}(a)}$  est *s-droite*.

Dès lors, si  $A \subset \mathbb{R}^N$  est un borélien tel que  $A \subset B_{r_0}(a)$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}^N$ , on obtient que  $\lambda_f \lfloor_A$  est *s-droite*. Comme  $\mathbb{R}^N$  est recouvert par une quantité dénombrable de boules de rayon  $r_0$ , il est aisé de construire la décomposition souhaitée.

Pour le cas général, nous écrivons

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n \leq f < n+1\},$$

où l'union est disjointe. Il suffit d'appliquer le procédé ci-haut à chaque élément de cette union, puis de réarranger les ensembles obtenus en une suite, et on obtient la décomposition attendue.

La stratégie employée par Delaware dans son article est en trois temps. Il commence par montrer que le résultat équivaut à la possibilité d'extraire de tout ensemble  $E$  de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie strictement positive un sous-ensemble  $A$  *s-droit* de mesure  $\mathcal{H}^s$  strictement positive [1, Theorem 2].

Ensuite, remarquons qu'en vertu de la proposition 2.7, les ensembles *s-droits* sont caractérisés par l'estimation

$$\mathcal{H}^s(E \cap B_r(x)) \leq \omega_s r^s$$

pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . La deuxième étape du raisonnement de Delaware est de montrer qu'étant donné un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^N$  de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie strictement positive, on peut effectivement extraire un sous-ensemble  $A \subset E$  de mesure  $\mathcal{H}^s$  strictement positive satisfaisant à cette estimation, à condition de multiplier la partie droite de l'inégalité par un facteur strictement supérieur à 1, et de se restreindre à des boules de rayon suffisamment réduit, dépendamment du facteur multiplicatif choisi [1, Lemma 1].

Enfin, et il s'agit de la partie la plus délicate de la démonstration, Delaware montre qu'en utilisant l'ensemble  $A$  fourni par le Lemma 1, on peut

extraire le sous-ensemble  $s$ -droit requis par le Theorem 2 [1, Theorem 4], construit de manière à se débarrasser du facteur multiplicatif et de la restriction sur le rayon des boules. Le théorème de décomposition suit alors de la combinaison de ces différents résultats.

Pour démontrer notre théorème de décomposition, nous allons suivre la même stratégie. Nous allons d'abord adapter le Theorem 2 à notre cadre de travail. Ensuite, nous remplacerons le Lemma 1 par [7, Proposition 14.15], qui s'avère être son analogue pour les mesures satisfaisant l'estimation  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ . Enfin, nous adapterons la preuve du Theorem 4 en conséquence.

Mais avant, énonçons un autre résultat dont nous aurons besoin de manière cruciale, qui affirme que les mesures de Borel qui attribuent une masse nulle aux singletons satisfont à une propriété des valeurs intermédiaires.

**PROPOSITION 2.14.** *Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mu(\{x\}) = 0$ , et un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(E) > 0$ . Pour tout  $0 < c < \mu(E)$ , il existe un borélien  $A \subset E$  tel que  $\mu(A) = c$ .*

Nous fragmentons la démonstration en deux parties distinctes pour en rendre la lecture plus agréable. Aussi, nous commençons par le lemme suivant.

**LEMME 2.15.** *Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mu(\{x\}) = 0$ , et un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(E) > 0$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un borélien  $A \subset E$  tel que  $0 < \mu(A) \leq \varepsilon$ .*

La stratégie de la preuve est la suivante. Nous allons construire un grand cube contenant une partie de la mesure de  $E$ . Puis, tirant parti de la possibilité de découper aisément des cubes de la forme  $\prod_{i=1}^N [a_i, b_i[$  en cubes de la même forme disjoints, nous allons découper ce cube en cubes de plus en plus petits. Comme les singletons sont de mesure nulle, nous finirons par obtenir un cube contenant une partie arbitrairement petite de la mesure de  $E$ . Pour démontrer ce lemme, la propriété suivante nous sera utile. Il s'agit à nouveau d'un résultat classique de théorie de la mesure, que nous rappelons sans preuve [3, Theorem 1.8].

**PROPOSITION 2.16 (Lemme des ensembles monotones).** *Soit  $\mu$  une mesure de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ . Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de boréliens de  $\mathbb{R}^N$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right).$$

Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de boréliens de  $\mathbb{R}^N$  telle que  $\mu(E_0) < +\infty$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \right).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.15. Soit  $\varepsilon > 0$ . La suite  $([-n, n]^N \cap E)_{n \in \mathbb{N}}$  étant une suite croissante de boréliens dont l'union est  $E$ , le lemme des ensembles monotones assure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu([-n, n]^N \cap E) = \mu(E) > 0$ , et donc nous pouvons trouver  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu([-m, m]^N \cap E) > 0$ . Posons  $Q_0 = [-m, m]^N$ .

On appellera dans la suite de la preuve *cube semi-ouvert* tout cube étant le produit d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite. À partir de  $Q_0$ , nous allons construire par récurrence une suite de cubes semi-ouverts  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de côté  $m2^{1-n}$  et tels que  $\mu(Q_n \cap E) > 0$ .

Supposons d'avoir construit  $Q_k$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Partitionnons  $Q_k$  en  $2^N$  cubes semi-ouverts disjoints dont les côtés ont une longueur de moitié inférieure à celle des côtés de  $Q_k$ . Comme  $\mu(Q_k \cap E) > 0$  par hypothèse d'induction, il découle de l'additivité de  $\mu$  qu'un des cubes de cette partition, noté  $R$ , doit vérifier  $\mu(R \cap E) > 0$ . En posant  $Q_{k+1} = R$ , nous obtenons un cube vérifiant les propriétés souhaitées. La suite annoncée est ainsi construite par récurrence.

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} m2^{1-n} = 0$ , nous déduisons que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n \subset \{x\}$  pour un certain  $x \in \mathbb{R}^N$ . En effet, si  $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ , alors par construction  $\|x - y\| \leq \sqrt{N}m2^{1-n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui implique  $\|x - y\| = 0$  et donc  $x = y$ . Comme  $\mu$  est finie, nous pouvons invoquer le lemme des ensembles monotones pour écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(Q_n \cap E) = \mu \left( \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Q_n \right) \cap E \right) \leq \mu(\{x\}) = 0.$$

Ceci implique l'existence de  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $0 < \mu(Q_l \cap E) \leq \varepsilon$ . Poser  $A = Q_l \cap E$  permet de conclure.  $\square$

Nous pouvons à présent démontrer notre proposition, ce que nous faisons par un argument d'épuisement classique en théorie de la mesure.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.14. Soit  $0 < c < \mu(E)$ . Nous allons construire par récurrence une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boréliens disjoints telle que  $\mu \left( \bigcup_{n=0}^k A_n \right) \leq c$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Définissons

$$c_0 = \sup \{ \mu(A) : \mu(A) \leq c, A \text{ borélien}, A \subset E \}.$$

Par définition du supremum, il est possible de trouver un borélien  $A_0 \subset E$  tel que  $\frac{c_0}{2} \leq \mu(A_0) \leq c_0 \leq c$ . Supposons d'avoir construit  $A_0, \dots, A_k$  pour un certain

$k \in \mathbb{N}$ , avec par hypothèse de récurrence  $a_k = \mu\left(\bigcup_{n=0}^k A_n\right) \leq c$ . Définissons

$$c_{k+1} = \sup \left\{ \mu(A) : \mu(A) \leq c - a_k, A \text{ borélien}, A \subset E \setminus \bigcup_{n=0}^k A_n \right\}.$$

Par définition du supremum, il existe un borélien  $A_{k+1} \subset E \setminus \bigcup_{n=0}^k A_n$  tel que  $\frac{c_{k+1}}{2} \leq \mu(A_{k+1}) \leq c_{k+1} \leq c - a_k \leq c$ . De cette façon,  $A_{k+1}$  est disjoint de  $A_0, \dots, A_k$  et par additivité de  $\mu$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{k+1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^k A_n\right) + \mu(A_{k+1}) \leq a_k + c - a_k = c.$$

La suite de boréliens annoncée est ainsi construite par récurrence.

Posons  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Nous pouvons calculer que

$$(*) \quad \mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^k \mu(A_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{n=0}^k A_n\right) \leq c.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant l'inégalité stricte. Comme

$$\mu(E \setminus A) = \mu(E) - \mu(A) > 0, \quad c - \mu(A) > 0,$$

en vertu du lemme 2.15, nous pouvons trouver un borélien  $B \subset E \setminus A$  tel que  $0 < \mu(B) \leq c - \mu(A)$ . Mais alors, en utilisant la monotonie de  $\mu$ , nous pouvons observer que

$$\mu(B) \leq c - a_k, \quad B \subset E \setminus \bigcup_{n=0}^k A_n$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Donc,  $B$  rentre dans le calcul de tous les  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dès lors, par définition,  $\mu(B) \leq c_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Or, par construction, nous avons d'autre part

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A) < +\infty.$$

La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant à termes positifs, ceci indique qu'elle est sommable. En particulier nous obtenons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ , d'où nous tirons  $0 < \mu(B) \leq 0$ , une contradiction. Par l'absurde, nous déduisons que nécessairement l'inégalité (\*) est une égalité, et la démonstration est complète.  $\square$

L'exemple suivant nous montre que la mesure de Hausdorff possède cette propriété d'affecter une mesure nulle aux singletons – sauf si  $s = 0$ , comme le montre la proposition 1.26. En revanche, rappelons qu'elle n'est en général pas finie, sauf si  $s > N$ .

EXEMPLE 2.17. Nous allons calculer la mesure de Hausdorff d'un singleton en montrant que

$$\mathcal{H}^s(\{x\}) = \mathcal{H}_\delta^s(\{x\}) = 0$$

pour tous  $0 < \delta \leq +\infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  et  $0 < s < +\infty$ .

Pour tout  $0 < r \leq \delta$ ,  $\{x\} \subset B_r(x)$ , et donc par définition  $\mathcal{H}_\delta^s(\{x\}) \leq \omega_s r^s$ . Comme  $0 < r \leq \delta$  est arbitraire et  $s > 0$ , on en déduit en faisant  $r \rightarrow 0$  que  $\mathcal{H}_\delta^s(\{x\}) = 0$ . En faisant ensuite  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient  $\mathcal{H}^s(\{x\}) = 0$ .

Maintenant, présentons l'adaptation de [1, Theorem 2] pour les mesures  $s$ -droites.

PROPOSITION 2.18. *Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  et  $0 \leq s < +\infty$ . Il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$  si et seulement si pour tout borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  avec  $\mu(E) > 0$ , il existe un borélien  $A \subset E$  avec  $\mu(A) > 0$  tel que  $\mu|_A$  est  $s$ -droite.*

DÉMONSTRATION. Traitons d'abord l'implication directe. Soit une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme dans l'énoncé. Soit  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien avec  $\mu(E) > 0$ . Par additivité de  $\mu$ , il doit nécessairement exister  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu(E \cap E_k) > 0$ . Il est aisé de voir que  $\mu|_{E \cap E_k}$  est  $s$ -droite, comme conséquence du fait que  $E \cap E_k \subset E_k$  avec  $\mu|_{E_k}$   $s$ -droite. Poser  $A = E \cap E_k$  permet alors de conclure.

L'implication réciproque se base sur un argument classique d'épuisement. Nous allons construire par récurrence une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boréliens disjoints de la façon suivante. Définissons

$$c_0 = \sup \left\{ \mu(A) : A \subset \mathbb{R}^N \text{ borélien, } \mu|_A \text{ est } s\text{-droite} \right\}.$$

Par définition du supremum, on peut trouver un borélien  $E_0 \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\frac{c_0}{2} \leq \mu(E_0) \leq c_0$  et  $\mu|_{E_0}$  est  $s$ -droite. Supposons d'avoir construit  $E_0, \dots, E_k$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Nous définissons

$$c_{k+1} = \sup \left\{ \mu(A) : A \subset \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=0}^k E_n \text{ borélien, } \mu|_A \text{ est } s\text{-droite} \right\},$$

et nous invoquons la définition du supremum pour pouvoir extraire un borélien  $E_{k+1} \subset \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n=0}^k E_n$  tel que  $\frac{c_{k+1}}{2} \leq \mu(E_{k+1}) \leq c_{k+1}$  et  $\mu|_{E_{k+1}}$  est  $s$ -droite. Ce procédé nous fournit une suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de boréliens disjoints tels que  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On affirme que  $\mu\left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 0$ , autrement dit nous avons « épuisé »  $\mathbb{R}^N$  par rapport à  $\mu$  en extrayant les  $E_n$ . Supposons que tel n'est pas le cas. Par

hypothèse, il existe alors un borélien  $A \subset \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  tel que  $\mu(A) > 0$  et  $\mu|_A$  est  $s$ -droite. Mais alors,  $A$  rentre dans le calcul de tous les  $c_n$ , ce qui implique par définition que  $\mu(A) \leq c_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cependant, par construction de la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et comme  $\mu$  est finie, nous avons

$$\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) < +\infty.$$

Comme les  $c_n$  sont positifs, ceci implique en particulier que  $c_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Mais dans ce cas, nous déduisons que  $\mu(A) = 0$ , une contradiction. Par l'absurde, on conclut que  $\mu\left(\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = 0$ .

Dès lors, il est direct d'observer que  $\mu|_{\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n}$  est  $s$ -droite car identiquement nulle. Adjoindre  $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  à la suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fournit alors la suite souhaitée, et la démonstration est complète.  $\square$

Poursuivant notre travail en vue de démontrer le théorème de décomposition, nous présentons maintenant la proposition suivante [7, Proposition 14.15], qui va remplacer [1, Lemma 1] dans la preuve du théorème de décomposition. La démonstration étant assez longue et plutôt technique, nous l'omettons. Le lecteur intéressé pourra la consulter dans la référence fournie.

**PROPOSITION 2.19.** *Soient  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$  et  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  tel que*

- (1) *pour tout  $\beta > 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\mu|_E \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s$ ,*
- (2)  *$\mu(\mathbb{R}^N \setminus E) \leq \varepsilon$ .*

Le dernier ingrédient manquant pour achever la construction de la preuve du théorème de décomposition est la proposition suivante, qui est l'adaptation de [1, Theorem 4] pour les mesures  $s$ -droites. Mais avant, faisons deux observations qui s'avéreront fort utiles pour la preuve.

La première est que la condition  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  implique en particulier que  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  si  $s > 0$ . En effet, dans ce cas, nous avons vu dans l'exemple 2.17 que  $\mathcal{H}^s(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ . Dès lors, il vient directement que  $0 \leq \mu(\{x\}) \leq \mathcal{H}^s(\{x\}) \leq 0$ , et donc  $\mu(\{x\}) = 0$ . Donc, la condition  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  suffit à garantir que  $\mu$  vérifie les hypothèses de la proposition 2.14 dans le cas  $s > 0$ .

La seconde est que de manière absolument analogue à ce qu'on a fait pour démontrer la proposition 2.7, on montre que la conclusion  $\mu|_E \leq \beta \mathcal{H}_\delta^s$  de la proposition 2.19 se réécrit comme  $\mu|_E(B_r(x)) \leq \beta \omega_s r^s$  pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$  avec  $0 \leq r \leq \delta$ .

PROPOSITION 2.20. *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Si  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$  est telle que  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , alors il existe un borélien  $E \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(E) > 0$  et tel que  $\mu|_E$  est  $s$ -droite.*

DÉMONSTRATION. On traite d'abord à part un cas particulier. Supposons qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(\{x\}) > 0$ . La première remarque précédant cette proposition nous informe que cela ne peut se produire que si  $s = 0$ . Dans ce cas, l'hypothèse ainsi que le calcul fait à la proposition 1.26 impliquent que  $0 < \mu(\{x\}) \leq \mathcal{H}^s(\{x\}) = 1 = \mathcal{H}_\infty^s(\{x\})$ . Donc, on peut directement conclure en posant  $E = \{x\}$ . Dans tous les autres cas, les singletons sont de mesure  $\mu$  nulle, et  $\mu$  vérifie donc les hypothèses de la proposition 2.14. Attaquons-nous maintenant à ces autres cas.

Soit  $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de réels strictement positifs telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$ . Comme  $\mu \neq 0$ ,  $\mu(\mathbb{R}^N) > 0$ , et alors la proposition 2.19 appliquée en prenant  $0 < \varepsilon < \mu(\mathbb{R}^N)$  assure l'existence d'un borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $\mu(A) > 0$  et de  $\delta_j > 0$  tel que  $\mu|_A \leq (1 + \varepsilon_j)\mathcal{H}_{\delta_j}^s$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . En vertu de la seconde remarque ci-dessus, cette condition se réécrit comme

$$(*) \quad \mu|_A(B_r(x)) \leq (1 + \varepsilon_j)\omega_s r^s$$

pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$  telle que  $0 \leq r \leq \delta_j$ .

Nous allons à présent remplacer les  $\delta_j$  par des  $r_j$  inférieurs, ce qui ne change pas les propriétés auxquelles ils satisfont. Nous choisissons la suite  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  strictement décroissante et telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j = 0$ .

Attelons-nous désormais à la construction du borélien  $E$  souhaité. Pour tout  $j \geq 1$ , on partitionne  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{i,j}$ , où les  $A_{i,j}$  sont des boréliens disjoints de diamètre inférieur à  $r_{j+1}$ . Pour voir qu'une telle partition peut effectivement être construite, on pourra décomposer  $\mathbb{R}^N$  en cubes semi-ouverts de côté  $\frac{r_{j+1}}{\sqrt{N}}$  et partitionner  $A$  en l'intersectant avec ces cubes. Supposons que  $\varepsilon_j < 1$  pour tout  $j \geq 1$ . Alors, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $j \geq 1$ , nous pouvons trouver un borélien  $E_{i,j} \subset A_{i,j}$  tel que

$$\mu(E_{i,j}) = (1 - \varepsilon_{j-1})\mu(A_{i,j}).$$

En effet, soit  $\mu(A_{i,j}) > 0$  et alors, comme  $0 < \varepsilon_{j-1} < 1$ , nous avons

$$0 < (1 - \varepsilon_{j-1})\mu(A_{i,j}) < \mu(A_{i,j})$$

et on peut appliquer directement la proposition 2.14, soit  $\mu(A_{i,j}) = 0$  et il suffit alors de prendre  $E_{i,j} = A_{i,j}$ . On construit ensuite  $E$  par

$$E = \bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j}.$$

Nous allons à présent montrer que  $E$  satisfait bien aux propriétés souhaitées pour peu que les suites  $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$  et  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  soient convenablement choisies. Il est clair que  $E$  est un borélien. Montrons à présent que  $\mu(E) > 0$ . Puisque pour tout  $j \geq 1$  les  $A_{i,j}$  avec  $i \in \mathbb{N}$  sont disjoints, il en est de même pour les  $E_{i,j}$  avec  $i \in \mathbb{N}$ , et on peut alors utiliser l'additivité de  $\mu$  pour écrire

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j}\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(E_{i,j}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (1 - \varepsilon_{j-1})\mu(A_{i,j}) = (1 - \varepsilon_{j-1})\mu(A)$$

pour tout  $j \geq 1$ . Écrivant

$$A \setminus E = A \setminus \left(\bigcap_{j \geq 1} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j}\right) = \bigcup_{j \geq 1} \left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j}\right),$$

il vient comme  $\mu$  est finie et  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j} \subset A$  pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\mu(A \setminus E) \leq \sum_{j \geq 1} \mu\left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,j}\right) = \sum_{j \geq 1} (\mu(A) - (1 - \varepsilon_{j-1})\mu(A)) = \sum_{j \geq 1} \varepsilon_{j-1}\mu(A).$$

Choisissons la suite  $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de telle sorte que

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j < 1.$$

Nous obtenons alors l'estimation

$$\mu(A \setminus E) < \mu(A).$$

On en déduit, comme  $E \subset A$ ,

$$\mu(E) = \mu(A) - \mu(A \setminus E) > 0,$$

comme souhaité.

Il reste à voir que  $\mu|_E$  est  $s$ -droite. En vertu de la proposition 2.7, ceci revient à montrer que  $\mu|_E(B_r(x)) \leq \omega_s r^s$  pour toute boule  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . Soit donc  $B_r(x) \subset \mathbb{R}^N$ . Si  $r = 0$ , c'est trivial. Supposons à présent  $r \geq r_0$ . Nous allons utiliser la mesure de  $A$  pour avoir le contrôle sur  $\mu|_E(B_r(x))$  dans ce cas. Quitte à utiliser la proposition 2.14 pour remplacer  $A$  par un sous-ensemble avant de construire  $E$ , ce qui ne change pas les propriétés obtenues, nous pouvons supposer que

$$0 < \mu(A) \leq \omega_s r_0^s.$$

Nous obtenons alors

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq \mu(E) \leq \mu(A) \leq \omega_s r_0^s \leq \omega_s r^s.$$

Seul reste donc le cas  $0 < r < r_0$ .

Dans ce cas, comme la suite  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  décroît strictement vers 0, nous pouvons trouver  $j \geq 1$  tel que  $r_j \leq r < r_{j-1}$ . Soit  $J$  l'ensemble des indices  $i \in \mathbb{N}$  tels que  $B_r(x) \cap E_{i,j} \neq \emptyset$ . On calcule

$$\begin{aligned} \mu|_E(B_r(x)) &= \mu \left( B_r(x) \cap \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{i,k} \right) \leq \mu \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B_r(x) \cap E_{i,j}) \right) \\ &= \mu \left( \bigcup_{i \in J} (B_r(x) \cap E_{i,j}) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la sous-additivité de  $\mu$ , il vient

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq \sum_{i \in J} \mu(B_r(x) \cap E_{i,j}) \leq \sum_{i \in J} \mu(E_{i,j}) = (1 - \varepsilon_{j-1}) \sum_{i \in J} \mu(A_{i,j}).$$

Les ensembles  $A_{i,j}$  avec  $i \in \mathbb{N}$  étant disjoints, on obtient alors

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq (1 - \varepsilon_{j-1}) \mu \left( \bigcup_{i \in J} A_{i,j} \right).$$

Puisque les  $A_{i,j}$  ont un diamètre inférieur à  $r_{j+1}$ , on trouve pour tout  $i \in J$  que  $A_{i,j} \subset B_{r+r_{j+1}}(x) \cap A$ , et donc  $\bigcup_{i \in J} A_{i,j} \subset B_{r+r_{j+1}}(x) \cap A$ . On en déduit que

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq (1 - \varepsilon_{j-1}) \mu(B_{r+r_{j+1}}(x) \cap A) = (1 - \varepsilon_{j-1}) \mu|_A(B_{r+r_{j+1}}(x)).$$

Supposons à présent que la suite  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  vérifie

$$2r_i \leq \delta_i$$

pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Comme  $r \leq r_{j-1}$ , nous avons alors  $r + r_{j+1} \leq 2r_{j-1} \leq \delta_{j-1}$ , ce qui nous permet d'appliquer l'estimation (\*) pour écrire

$$\mu|_A(B_{r+r_{j+1}}(x)) \leq (1 + \varepsilon_{j-1}) \omega_s (r + r_{j+1})^s.$$

Donc,

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq \omega_s (1 - \varepsilon_{j-1}^2) (r + r_{j+1})^s.$$

Pour conclure l'argument, nous pouvons utiliser la continuité uniforme de  $t \mapsto t^s$  sur  $[r_i, r_{i-1}]$  pour construire par récurrence la suite  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de telle sorte que

$$\frac{(t + r_{i+1})^s}{t^s} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_{i-1}^2}$$

pour tout  $r_i \leq t \leq r_{i-1}$ . Ceci nous permet alors d'écrire

$$\mu|_E(B_r(x)) \leq \omega_s r^s.$$

Tous les cas désormais traités, ceci achève la preuve.  $\square$

La preuve du théorème de décomposition n'est désormais plus qu'une question de combiner correctement les différents résultats de cette section.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.10. On commence par supposer que  $\mu$  est finie. Soit  $E \subset \mathbb{R}^N$  un borélien tel que  $\mu(E) > 0$ . Comme  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ , par restriction,  $\mu|_E \leq \mathcal{H}^s$ . Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.20 à  $\mu|_E$  pour obtenir un borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$  tel que  $0 < \mu|_E(A) = \mu(E \cap A)$  et tel que la mesure  $(\mu|_E)|_A = \mu|_{E \cap A}$  est  $s$ -droite. Donc,  $A \cap E$  est un sous-ensemble borélien de  $E$  de mesure  $\mu$  strictement positive sur lequel  $\mu$  se restreint en une mesure  $s$ -droite. Ceci nous permet d'invoquer la proposition 2.18 pour obtenir une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et ainsi conclure la démonstration du théorème.

Dans le cas où  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, on peut trouver une suite de boréliens disjoints  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mu|_{A_n}$  est finie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut alors appliquer la première partie du résultat à  $\mu|_{A_n}$  et obtenir une suite de boréliens disjoints  $(E_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n,k}$  et  $(\mu|_{A_n})|_{E_{n,k}} = \mu|_{A_n \cap E_{n,k}}$  est  $s$ -droite pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . La famille  $(E_{n,k} \cap A_n)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ , dénombrable car indexée par  $\mathbb{N}^2$  qui est dénombrable, fournit alors la suite souhaitée.  $\square$

Pour que la généralisation soit complète, nous allons maintenant montrer comment le théorème de décomposition énoncé par Delaware s'obtient comme un corollaire du théorème que nous venons de prouver.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.11. Définissons  $\mu = \mathcal{H}^s|_E$ . Comme  $E$  est un borélien de mesure  $\mathcal{H}^s$  finie, alors  $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ . De plus, il est clair que  $\mu \leq \mathcal{H}^s$ . On peut donc invoquer le théorème 2.10 pour obtenir une suite de boréliens disjoints  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  et la mesure  $\mu|_{A_n} = \mathcal{H}^s|_{E \cap A_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or, nous avons remarqué après la définition 2.6 que cela équivaut à affirmer que  $E \cap A_n$  est  $s$ -droit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E \cap A_n = E$ , il suffit de poser, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_n = E \cap A_n$  pour conclure la démonstration.  $\square$

Nous pouvons à présent répondre à la question que nous avons posée au début de ce travail, s'il est possible de décomposer un arc de cercle en ensemble droits. C'est ce que nous faisons dans l'exemple suivant, qui nous donne également l'opportunité d'illustrer de manière visuelle la manière dont est construite la décomposition dans la preuve du théorème 2.10.

EXEMPLE 2.21. Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  un arc de cercle, comme dans l'exemple 1.31. Nous savons que  $E$  est un borélien de mesure  $\mathcal{H}^1$  finie, et on peut donc lui

appliquer le théorème de Delaware pour le décomposer en une union dénombrable d'ensembles 1-droits disjoints. Ce fait semble surprenant. En effet, notre intuition des ensembles 1-droits est qu'il s'agit de parties d'apparence rectiligne, ressemblant à des segments. Le théorème affirme donc qu'un arc de cercle peut être partitionné en une quantité dénombrable d'ensembles ayant l'apparence de segments.

On peut examiner la preuve du théorème de décomposition pour comprendre comment sont construits ces ensembles 1-droits, et nous allons illustrer ce procédé sur l'arc de cercle. Nous verrons que les ensembles obtenus sont loin d'être aussi simples que des segments.

En étudiant la stratégie employée pour démontrer le théorème, nous remarquons que la décomposition est construite à l'aide d'extractions répétées de sous-ensembles 1-droits de mesure  $\mathcal{H}^1$  strictement positive fournis par la proposition 2.20. Le point crucial est donc de comprendre comment est construit le borélien  $E$  fourni par cette proposition. L'objectif étant de donner une illustration visuelle, on mettra volontairement les détails de côté pour nous concentrer sur l'intuition.

D'abord, on extrait un borélien  $A \subset \mathbb{R}^N$  donné par la proposition 2.19 et de mesure  $\mathcal{H}^1$  suffisamment réduite. Ici, un arc de cercle de petite longueur convient.

Après, on construit des partitions de  $A$  en sous-ensembles boréliens de diamètre de plus en plus réduit. Pour chaque partition, on remplace ensuite chaque élément par un sous-ensemble de mesure  $\mathcal{H}^1$  légèrement inférieure. Procédant ainsi, on extrait de chaque partition un sous-ensemble de mesure inférieure, d'apparence très fragmentée. Quatre étapes de ce procédé sont illustrées pour l'arc de cercle sur la figure 3, les partitions étant marquées par des traits et les sous-ensembles extraits représentés en bleu.

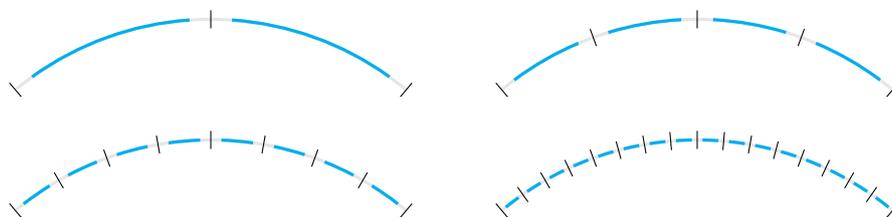


FIGURE 3. Quatre partitions pour la construction du borélien  $E$

Enfin, le borélien  $E$  cherché est construit par intersection des ensembles construits à partir des différentes partitions. En guise d'illustration, l'intersection des quatre ensembles en bleu de la figure 3 est présentée à la figure 4.

On voit qu'on obtient un ensemble d'apparence très similaire à l'ensemble de Cantor présenté dans l'exemple 2.2. Mentionnons quand même que l'ensemble obtenu est plus « épais » que l'ensemble de Cantor usuel. En effet, il doit être de mesure  $\mathcal{H}^1$  strictement positive, tandis que l'ensemble de Cantor usuel est de mesure nulle. L'ensemble que nous obtenons a donc plutôt l'apparence d'un *ensemble de Cantor généralisé*, aussi appelé *ensemble de Cantor gras*, voir [3, Page 39].



FIGURE 4. Intersection des ensembles de la figure 3

Cet exemple nous aura donc permis de mieux comprendre comment fonctionne la démonstration de notre théorème de décomposition. Il nous aura également montré que tous les ensembles 1-droits (et plus généralement  $s$ -droits) ne sont pas aussi simples que des portions de droites (ou d'espaces affines). Ceux intervenant dans la preuve du théorème de décomposition ont au contraire une apparence très complexe, semblable à celle de l'ensemble de Cantor.

Le théorème de décomposition que nous avons démontré s'applique à des mesures  $\sigma$ -finies. On peut néanmoins s'interroger sur la possibilité d'étendre le résultat à des mesures de Borel non  $\sigma$ -finies. Le résultat suivant nous révèle que cela n'est pas possible.

**PROPOSITION 2.22.** *Soit  $0 \leq s < +\infty$ . Soit  $\mu$  une mesure de Borel pour laquelle il existe une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors,  $\mu$  est  $\sigma$ -finie.*

**DÉMONSTRATION.** Par hypothèse, nous pouvons trouver une suite de boréliens disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  et  $\mu|_{E_n}$  est  $s$ -droite pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Définissons, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = B_n(0)$ . On invoque l'additivité de  $\mu$  et la proposition 2.7 pour écrire

$$\mu\left(B_n \cap \left(\bigcup_{k=0}^n E_k\right)\right) = \sum_{k=0}^n \mu|_{E_k}(B_n) \leq (n+1)\omega_s n^s < +\infty.$$

En définissant  $A_n = B_n \cap \left(\bigcup_{k=0}^n E_k\right)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons alors bien  $\mu(A_n) < +\infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Donc,  $\mu$  est  $\sigma$ -finie.  $\square$



## Conclusion

Nous nous étions posé deux questions au début de ce travail. Nous avons répondu à la seconde question en étudiant la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ . Nous avons vu qu'elle définit, pour tout  $0 \leq s < +\infty$ , une notion raisonnable de volume  $s$ -dimensionnel pour les parties de  $\mathbb{R}^N$ , possédant toutes les propriétés que nous espérions pour une telle quantité – monotonie, invariance sous les isométries, additivité sur une large classe d'ensembles – et prenant les valeurs que nous souhaitions sur un bon nombre d'exemples.

Cette mesure de Hausdorff nous a ensuite permis de donner une définition d'ensemble  $s$ -droit, nous fournissant un cadre formel pour aborder la première question. Avec cette définition, la réponse à cette première question était déjà connue depuis l'article publié en 2002 par Delaware, et de manière étonnante, nous avons vu qu'elle est affirmative. L'étude de l'argument utilisé par Delaware pour obtenir ce résultat nous a permis d'obtenir un théorème plus général permettant, pour une mesure de Borel  $\mu$  arbitraire, de convertir l'inégalité abstraite  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  en une estimation concrète pour  $\mu$  via une décomposition.

Ce travail nous aura permis de découvrir et d'employer un bon nombre de résultats et de techniques de théorie de la mesure, et nous espérons que cela motivera l'étude de ce domaine. La mesure de Hausdorff est un vaste sujet, et nous n'avons pu en explorer qu'une petite partie dans ce texte. Le lecteur intéressé pourra donc en poursuivre l'étude dans plusieurs directions.

Concluons sur un commentaire. Dans les exemples que nous avons présentés pour illustrer le théorème de décomposition, ou bien nous avons considéré  $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner_E$ , et nous avons en fait utilisé le théorème déjà obtenu par Delaware, ou bien nous avons considéré des mesures à densité, et nous avons observé que la décomposition annoncée par notre théorème peut en fait être construite à la main. On peut donc s'interroger sur l'apport de notre théorème pour des applications sur une mesure de Borel  $\mu$  particulière.

Cependant, il s'avère que l'univers des mesures de Borel ne se limite pas aux mesures  $\mathcal{H}^s$  et à leurs densités. On pourra par exemple consulter [7] pour obtenir une manière de construire d'autres mesures de Borel vérifiant

l'estimation  $\mu \leq \mathcal{H}^s$  nécessaire pour appliquer le théorème de décomposition. Cependant, en esquisser la construction nous emmènerait bien au-delà du cadre de ce travail, puisque cela repose sur des notions d'analyse fonctionnelle comme le *théorème de Hahn-Banach* et les *capacités de Sobolev*. Cela fournit une piste possible pour le lecteur qui, suite à la lecture de ce texte, souhaiterait approfondir le sujet.

Je tiens à terminer ce travail en remerciant mon promoteur, le Pr. Augusto Ponce, pour m'avoir proposé ce sujet intéressant et original, pour sa grande disponibilité ainsi que pour ses nombreux conseils, tant au niveau du contenu que sur la manière de rédiger un texte mathématique de manière structurée et pédagogique.

## Génération de mesures

Dans cette annexe, nous présentons quelques résultats utilisés dans le but de construire des mesures, qui vont nous permettre de démontrer que  $\mathcal{H}^s$  est une mesure de Borel. S'agissant davantage d'outils que du sujet de ce travail, nous en omettons les preuves, et nous les restreignons aux mesures de Borel sur  $\mathbb{R}^N$ , comme nous l'avons fait jusqu'ici. Le lecteur pourra retrouver ces résultats, énoncés en toute généralité et démontrés, dans n'importe quel ouvrage de référence en théorie de la mesure – par exemple [3].

On commence par définir la notion de *mesure extérieure*. Il s'agit d'un analogue des mesures, où on a remplacé l'additivité par la propriété plus faible de sous-additivité, mais qui sont définies sur tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^N$ .

DÉFINITION A.1. *Une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^N$  est une application  $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$  telle que*

- (1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (2) si  $A \subset B$ ,  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ,
- (3)  $\mu^*\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(E_n)$ .

L'intérêt principal des mesures extérieures réside dans le fait qu'elles permettent de construire des mesures, via le procédé de Carathéodory.

DÉFINITION A.2. *Soit  $\mu^*$  une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^N$ . Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^N$  est dit  $\mu^*$ -mesurable lorsque, pour tout  $E \subset \mathbb{R}^N$ ,*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

*Cette condition est parfois appelée critère de Carathéodory.*

Intuitivement, un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^N$  est mesurable lorsqu'il sépare correctement tout ensemble  $E \subset \mathbb{R}^N$  par rapport à la mesure extérieure  $\mu^*$ . Le théorème suivant, dû à Carathéodory, justifie l'intérêt porté aux mesures extérieures.

**THÉORÈME A.3.** *Si  $\mu^*$  est une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^N$  telle que tout borélien est  $\mu^*$ -mesurable, alors la restriction de  $\mu^*$  sur les boréliens est une mesure.*

Il existe une classe de mesures extérieures pour lesquelles les boréliens sont toujours  $\mu^*$ -mesurables. Il s'agit des mesures extérieures qui séparent correctement les ensembles qui sont à distance non nulle l'un de l'autre.

**DÉFINITION A.4.** *Une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^N$  est une mesure extérieure métrique lorsque, pour tous  $A, B \subset \mathbb{R}^N$  tels que  $d(A, B) > 0$ ,*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

où

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

désigne la distance entre  $A$  et  $B$ .

**PROPOSITION A.5.** *Si  $\mu^*$  est une mesure extérieure métrique sur  $\mathbb{R}^N$ , alors tout sous-ensemble borélien de  $\mathbb{R}^N$  est  $\mu^*$ -mesurable.*

Nous avons maintenant tous les outils qu'il nous faut pour montrer que  $\mathcal{H}^s$  est une mesure de Borel.

**DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.22.** Nous savons que  $\mathcal{H}^s$  définit une mesure extérieure sur  $\mathbb{R}^N$  en vertu des propositions 1.12 et 1.19 – le fait que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$  est clair. La proposition 1.21 entraîne qu'il s'agit d'une mesure extérieure métrique. Nous déduisons donc de la proposition A.5 que tout borélien de  $\mathbb{R}^N$  est  $\mathcal{H}^s$ -mesurable, et le théorème de Carathéodory permet de conclure.  $\square$

## Bibliographie

- [1] R. Delaware, *Every set of finite Hausdorff measure is a countable union of sets whose Hausdorff measure and content coincide*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 2537–2542. †8, 26, 28, 30, 31, 34, 35
- [2] K. J. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. †5, 18, 24
- [3] G. B. Folland, *Real analysis: Modern techniques and their applications, Second Edition*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1999. †5, 8, 18, 21, 26, 31, 41, 45
- [4] J. Foran, *Measure preserving continuous straightening of fractional dimensional sets*, Real Anal. Exchange (2) **21** (1995), 732–738. †7
- [5] F. Hausdorff, *Dimension und äußeres Maß.*, Math. Ann. **79** (1918), no. 1–2, 157–179. †5
- [6] H. Olbermann, *Analyse mathématique: Intégration*, UCLouvain, 2018. †18
- [7] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, Measures and Capacities*, EMS Tracts in Mathematics, 23, European Mathematical Society, Zurich, 2016. †16, 31, 35, 43
- [8] A. C. Ponce and J. Van Schaftingen, *Analyse mathématique 1: Fonction d'une variable réelle*, UCLouvain, 2016. †18, 19