

Faculté des sciences

# Espaces de Sobolev à valeurs variétés

Auteur : Antoine Detaille

Promoteurs : Petru Mironescu et Augusto Ponce

Lecteurs : Pierre Bieliavsky et Michel Willem

Année académique 2021-2022



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
FACULTÉ DES SCIENCES  
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

---

# ESPACES DE SOBOLEV À VALEURS VARIÉTÉS

---

ANTOINE DETAILLE  
PROMOTEURS : PETRU MIRONESCU ET AUGUSTO PONCE  
LECTEURS : PIERRE BIELIAVSKY ET MICHEL WILLEM

Mémoire de master  
Juin 2022



## Remerciements

Mes premiers mots de remerciement vont bien entendu à mes deux promoteurs, le Professeur Petru Mironescu et le Professeur Augusto Ponce, pour m'avoir proposé un sujet de mémoire si passionnant. Vous avez toujours trouvé du temps à me consacrer pour me donner des conseils et des suggestions, répondre à mes questions et relire ce que j'écrivais. J'ai énormément appris à votre contact, et il n'y a pas de mots pour exprimer ma gratitude pour tout ce que vous avez fait pour moi. C'est un réel plaisir d'interagir avec vous, et j'espère avoir ce plaisir durant davantage d'années encore.

Je remercie également le Professeur Pierre Bieliavsky et le Professeur Michel Willem pour avoir accepté de lire ce travail. Mon vœu est qu'il soit pour vous une lecture agréable. Sachez que les matières que vous m'avez enseignées furent indispensables à la réalisation de ce travail. Plus généralement, je tiens à remercier tous les Professeurs que j'ai eu la chance d'avoir durant mon parcours, pour tout ce que vous m'avez enseigné.

Merci aussi à Oscar Domínguez pour toutes nos discussions intéressantes au cours de cette dernière année à Lyon, et pour avoir pris le temps de partager avec moi sa passion pour les mathématiques, en particulier pour la théorie de l'interpolation et les espaces de fonctions.

Ensuite, je remercie mes amis de l'université pour ces cinq merveilleuses années, enrichissantes à tous points de vue. Tous les bons moments que nous avons vécus ensemble, réunis par une passion commune, sont autant de souvenirs inoubliables. Merci tout particulièrement à tous ceux avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger au sujet de nos mémoires respectifs au cours de cette dernière année. La réalisation d'un tel travail est une expérience bien plus passionnante encore lorsqu'on peut la partager, et en ce qui me concerne, j'ai eu la chance d'être entouré pour ce faire du meilleur groupe d'amis dont on puisse rêver. Ce fut un privilège de vivre cette aventure fascinante à vos côtés.

Enfin, mes derniers mots sont pour ma famille. Merci pour vos encouragements, votre soutien constant et votre présence indéfectible à mes côtés, même à distance lors de réalisation de ce mémoire à Lyon. Je ne serais parvenu nulle part sans vous. Merci d'être vous-mêmes, tout simplement. Une mention spéciale pour mon petit frère, Célestin, qui a toujours su me faire rire même dans les instants plus difficiles.

Je dédie ce mémoire à mon grand-père, Jacques Rosquin, qui a pris le large pour la dernière fois pendant que ce travail était en préparation. Merci d'avoir toujours cru en moi.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Autour des espaces de Sobolev</b>	<b>13</b>
1.1 Espaces de Sobolev à valeurs réelles et variétés . . . . .	13
1.2 Argument de généricité . . . . .	15
1.3 Élargir ou contracter $\Omega$ . . . . .	18
<b>2 Introduction au problème de l'approximation</b>	<b>21</b>
2.1 Énoncé et motivation du problème . . . . .	21
2.2 Le cas surcritique : $sp > m$ . . . . .	23
2.3 Le cas critique : $sp = m$ . . . . .	25
2.4 Une obstruction topologique . . . . .	28
<b>3 Introduction au problème des traces et de l'extension</b>	<b>33</b>
3.1 Énoncé et motivation du problème . . . . .	33
3.2 Extension locale lorsque $p \geq m$ . . . . .	38
3.3 Extension globale lorsque $p \geq m$ . . . . .	40
3.4 Nouvelle obstruction topologique lorsque $p < m$ . . . . .	42
<b>4 Introduction au problème du relèvement</b>	<b>45</b>
4.1 Énoncé et motivation du problème . . . . .	45
4.2 Le cas surcritique : $sp > m$ . . . . .	49
4.3 Une obstruction topologique . . . . .	52
<b>5 Approximation lorsque <math>s = 1</math></b>	<b>55</b>
5.1 Une réponse complète au problème d'approximation lorsque $s = 1$ . . . . .	55
5.2 Découpage de $Q$ : bons et mauvais cubes . . . . .	56
5.3 Un résultat de convergence faible : la technique de l'extension homogène . . . . .	59
5.4 Approximer sur les bons cubes : projection sur une boule suffisamment réduite . . . . .	62
5.5 Conclusion de la démonstration : effacer les singularités . . . . .	65

5.6	Esquisse du cas $p \leq m - 1$ . La classe $\mathcal{R}_p$ . . . . .	67
5.7	Commentaires et perspectives . . . . .	70
<b>6</b>	<b>La méthode de la projection singulière</b>	<b>77</b>
6.1	Extension par la méthode de la projection singulière . . . . .	77
6.2	Construction de la projection singulière . . . . .	78
6.3	Composition avec la projection : le théorème de Morse-Sard . . . . .	81
6.4	Estimation de l'énergie : l'argument de moyenne de Federer-Fleming . . . . .	83
6.5	Approximation par la méthode de la projection singulière . . . . .	85
6.6	Commentaires et perspectives . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Obstructions analytiques</b>	<b>91</b>
7.1	Obstructions analytiques à l'extension . . . . .	91
7.2	Énergie d'extension et borne inférieure fondamentale . . . . .	92
7.3	Applications d'énergie d'extension arbitrairement élevée . . . . .	95
7.4	Démonstration du Théorème 7.1 . . . . .	98
7.5	Commentaires et perspectives . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Relèvement dans le cas sous-critique</b>	<b>103</b>
8.1	Le cas $s = 1$ . . . . .	104
8.2	Vers le cas $s > 1$ : augmenter la régularité . . . . .	109
8.3	Le cas critique : quand le relèvement rencontre l'extension . . . . .	114
8.4	Le cas $0 < s < 1$ : quand la compacité joue un rôle crucial . . . . .	116
8.5	Quand l'extension rencontre le relèvement . . . . .	125
8.6	Commentaires et perspectives . . . . .	126
	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
	<b>Références</b>	<b>131</b>

# Introduction

Depuis leur introduction dans les années 30, les espaces de Sobolev ont su se frayer une place de choix en analyse mathématique, et surtout en équations aux dérivées partielles et en calcul des variations. L'utilisation d'une notion faible de dérivée offre la possibilité de rechercher des solutions pour des équations aux dérivées partielles parmi des fonctions présentant des discontinuités ou n'étant pas dérivables en tout point au sens classique, tandis que l'emploi d'une norme définie à partir d'une intégrale s'avère – entre autres – particulièrement compatible avec les estimations d'énergie. Leurs bonnes propriétés séquentielles – complétude, compacité dans la topologie faible – permettent la construction de solutions à certains problèmes à partir de solutions approchées, et les rendent parfaitement adaptés à la mise en œuvre de la méthode directe du calcul des variations. Ces espaces ont depuis fait l'objet de nombreuses recherches, et leurs propriétés fondamentales sont désormais bien connues. Quantité d'ouvrages de référence sont disponibles pour les étudier.

Déjà dans les années 80, une petite communauté de mathématiciens avait saisi l'intérêt de considérer des fonctions de Sobolev prenant leurs valeurs dans une variété. La motivation pour l'étude de telles fonctions provient notamment d'applications à des problèmes issus de la physique. Par exemple, si on souhaite décrire la configuration d'un champ de cristaux liquides localisé dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , il est naturel de considérer des applications  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$ , qui donnent en chaque point la direction dans laquelle pointent les cristaux. En tenant compte du fait que les cristaux ne sont pas orientés, on peut vouloir remplacer la cible  $\mathbb{S}^2$  par le plan projectif de dimension 2  $\mathbb{R}P^2$ . D'autres variétés cibles émergent de l'étude d'autres systèmes physiques, dont les cristaux liquides biaxiaux ou l'hélium superfluide. Le cercle  $\mathbb{S}^1$  apparaît quant à lui dans l'étude du problème de Ginzburg-Landau, qui constitue un champ de recherche à part entière. On pourra consulter l'article de Bethuel et Chiron [6] pour une brève revue des motivations physiques pour l'étude des espaces de Sobolev à valeurs variétés, et les références qui s'y trouvent fournissent au lecteur curieux un moyen d'approfondir ses recherches.

En présence de la contrainte variété, les espaces de Sobolev perdent leur statut d'espaces vectoriels. En effet, l'appartenance à une variété n'a aucune raison d'être préservée par combinaison linéaire. En raison de ce fait, les outils de la théorie linéaire ne sont pas disponibles pour l'étude des espaces de Sobolev à valeurs variétés. Au rang des pertes, on mentionnera surtout le produit de convolution, outil dont l'utilité n'est plus à prouver en théorie des espaces de Sobolev classiques. En effet, en général, le

produit de convolution détruit complètement la contrainte variété. En outre, le choix d'une cible à la topologie non triviale combiné à la possibilité qu'ont les applications de Sobolev d'exhiber des singularités robustes est source d'obstructions nouvelles, inconnues du paysage classique. Pour ces raisons, les espaces de Sobolev à valeurs variétés offrent des défis qui ne se présentent pas dans l'étude des fonctions de Sobolev à valeurs réelles. Nous avertissons dès à présent le lecteur habitué à la théorie classique : certains résultats bien connus du cadre réel ne sont en général pas valides en présence de la contrainte variété, comme nous aurons l'occasion de le découvrir dans ce travail.

Dans ce mémoire, nous explorons la théorie de ces fonctions de Sobolev à valeurs variétés et les problèmes fascinants qu'elles soulèvent. Plus précisément, nous nous concentrons sur trois problèmes particulièrement importants : l'approximation, l'extension et le relèvement. Le premier porte sur la possibilité d'approcher les fonctions de Sobolev par des applications lisses en préservant la contrainte variété. Le deuxième demande si toute application de Sobolev définie sur le bord d'un domaine s'étend en une fonction de Sobolev définie sur tout le domaine sous la contrainte variété. Le dernier s'interroge sur l'existence d'un relèvement d'une application de Sobolev à travers un revêtement de la variété cible. Nous ne souhaitons pas donner au lecteur l'impression que nous avons rassemblé trois problèmes distincts en un seul texte, aussi nous saisissons à chaque fois qu'elle se présente l'opportunité d'illustrer les liens entre ces trois questions, que ce soit en présentant des techniques communes, ou des implications directes entre des résultats issus de deux de ces problèmes.

Ces trois problèmes ont fait l'objet de nombreuses recherches, et un grand nombre d'articles leur sont dédiés – bien que plusieurs questions restent à ce jour encore ouvertes. Cependant, la discipline manque toujours d'une synthèse qui résumerait les connaissances actuelles disponibles au sujet de ces problèmes. Le livre de Brezis et Mironescu [22] constitue une référence complète pour ces trois problèmes et bien plus encore, mais se concentre presque exclusivement sur le cas où la variété est le cercle. Le cours de Van Schaftingen [56] considère la théorie générale, mais reste encore en préparation. L'ambition de ce travail est de proposer une telle synthèse de la théorie actuelle concernant les trois problèmes que nous avons mentionnés.

Les résultats que nous présentons ne sont pas nouveaux, et sont tous bien connus des experts. L'originalité de ce travail ne réside donc pas dans les énoncés qui y figurent, mais plutôt dans son approche synthétique et, nous l'espérons, pédagogique. Nous partons du constat que plusieurs des articles que nous utilisons comme référence sont écrits par et pour des experts du domaine, et peuvent s'avérer assez difficiles à comprendre pour le lecteur non familier du sujet – l'auteur en est le premier témoin. Nous avons donc cherché à présenter un certain nombre de résultats et surtout d'outils appartenant au domaine des espaces de Sobolev à valeurs variétés de façon claire et cohérente, en fournissant suffisamment d'explications pour que le lecteur débutant puisse suivre avec le moins de difficultés possible. À cette fin, nous n'avons pas hésité à présenter d'abord – voire exclusivement – des cas particuliers contenant déjà l'essentiel

des idées du cas général, et où le fil conducteur de l'argument est plus apparent. En particulier, nous avons de façon systématique pris soin d'éviter de passer sous silence des subtilités dans nos raisonnements, certaines apparaissant de façon récurrente. Au contraire, nous avons tâché d'attirer l'attention du lecteur sur celles-ci à chaque fois – ou au moins les premières fois – qu'elles se présentent. Une conséquence de ce choix est la longueur plus conséquente du texte qui en résulte, et nous espérons que cela ne découragera pas le lecteur. Notre souhait est que ce texte donne au lecteur l'envie de poursuivre plus avant son exploration de ce domaine passionnant que sont les espaces de Sobolev à valeurs variétés, et qu'il constitue une aide pour aborder la littérature spécialisée.

Ce travail se veut abordable avec le minimum de prérequis possible. Une certaine familiarité avec les espaces de Sobolev classiques constituera un atout précieux, mais des rappels accompagnés de références seront proposés au lecteur peu familier de ce domaine. En ce qui concerne les concepts de topologie, de géométrie différentielle et les résultats plus avancés d'espaces de Sobolev que nous utiliserons, ils seront systématiquement rappelés et énoncés de façon complète. Plutôt que de présenter ces notions dans un chapitre dédié, nous avons choisi de les inclure dans la continuité du mémoire, au moment où nous en faisons usage. En de rares occasions, cela nous conduira à employer un résultat qu'il nous a semblé plus pertinent d'inclure plus loin dans le texte, là où la motivation pour l'introduire semblait plus claire, mais un renvoi à l'énoncé du résultat sera alors systématiquement fourni.

Le premier chapitre de ce mémoire est dédié à quelques rappels qui n'ont pas trouvé leur place dans le reste du texte. Partant des espaces de Sobolev classiques, nous introduisons les espaces de Sobolev à valeurs variétés, qui seront notre objet d'étude central. Nous expliquons ensuite l'argument de genericité, outil indispensable dont nous ferons usage à de nombreuses reprises, et nous terminons par un lemme permettant d'élargir ou de contracter le domaine de définition de nos fonctions.

Le trois chapitres suivants introduisent les problèmes que nous allons étudier, et partagent une structure commune. Après avoir fourni une motivation, nous donnons un énoncé précis du problème. Nous étudions ensuite le cas où la résolution du problème est facile, qui correspond au cas où la régularité des applications de Sobolev est suffisante pour se ramener à la théorie classique. Nous terminons par un exemple modèle du type d'obstructions topologiques, inconnues de la théorie classique, qui surgissent en présence de la contrainte variété. Dans ces chapitres, nous avons particulièrement pris soin de fournir les détails des raisonnements, même en ce qui concerne les arguments considérés comme triviaux dans la littérature spécialisée, afin de permettre au lecteur qui découvre le sujet de se familiariser avec les outils de base du domaine.

Ensuite, dans le Chapitre 5, nous traitons le problème de l'approximation pour des fonctions de Sobolev d'ordre 1, ce qui nous donne l'opportunité de présenter plusieurs

techniques centrales dans l'étude de ce problème, dont la méthode des bons et mauvais cubes et la méthode de l'extension homogène.

Le Chapitre 6 est dédié à la méthode de la projection singulière. Sous des hypothèses topologiques sur la variété cible, cette méthode permet de travailler avec la théorie réelle avant de projeter nos constructions sur la cible. Elle constitue un très bel exemple d'interaction entre des outils topologiques, géométriques et analytiques.

Le Chapitre 7 aborde la méthode de construction d'obstructions analytiques. Contrairement aux obstructions topologiques, elles sont construites en recollant ensemble, après une mise à l'échelle convenable, des fonctions se comportant de plus en plus mal en regard du problème considéré, mais néanmoins lisses.

Enfin, dans le Chapitre 8, nous étudions plusieurs résultats non triviaux concernant le problème du relèvement. Nous partons du cas des fonctions de Sobolev d'ordre 1, qui est le plus technique. Ce cas nous servira ensuite de point de départ pour le cas d'ordre supérieur à 1. Nous abordons enfin le cas d'ordre inférieur à 1, où nous verrons que la compacité du revêtement joue un rôle fondamental.

À la fin de chaque chapitre à l'exception des quatre premiers, une section de commentaires et perspectives est proposée au lecteur curieux. On y trouvera une esquisse de certains résultats et outils qui n'ont pas trouvé place dans le corps du texte, souvent par souci de longueur ou parce qu'ils nous auraient conduits à introduire un trop grand nombre de notions intermédiaires, mais également des perspectives vers d'autres problèmes que nous n'avons pas eu l'occasion de traiter. Des références seront systématiquement fournies pour permettre au lecteur de poursuivre son étude.

# Chapitre 1

## Autour des espaces de Sobolev

Dans ce chapitre, nous introduisons plusieurs notions qui nous seront utiles tout au long de ce travail. Dans la Section 1.1, après un rappel sur les espaces de Sobolev classiques, nous introduirons l'objet d'étude central de ce mémoire : les *espaces de Sobolev à valeurs variétés*. La Section 1.2 est dédiée aux arguments de genericité, qui nous seront utiles à de nombreuses reprises pour étudier le comportement d'une fonction de Sobolev sur un sous-ensemble générique de son domaine. Enfin, dans la Section 1.3, nous présenterons un lemme permettant d'élargir ou de contracter un domaine  $\Omega$ , auquel nous aurons plusieurs fois recours par la suite.

### 1.1 Espaces de Sobolev à valeurs réelles et variétés

Dans l'ensemble de ce travail,  $\Omega$  désigne un sous-ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^m$  supposé suffisamment régulier. L'objectif de ce texte n'est pas de présenter des résultats optimaux selon la régularité du domaine, aussi le lecteur pourra garder en tête que  $\Omega$  est un ouvert lisse, ou étoilé et localement lipschitzien. Ceci permet d'inclure dans notre analyse des domaines usuels de faible régularité, tels que le cube, tout en ayant à notre disposition les théorèmes classiques sur les espaces de Sobolev – notamment les injections de Sobolev – ainsi que le Lemme 1.4 permettant d'élargir ou de contracter  $\Omega$ . Toute hypothèse de régularité supplémentaire sera précisée explicitement le cas échéant.

On considère également  $1 \leq p < +\infty$  et  $0 < s < +\infty$ . Là encore, toute restriction supplémentaire sur la gamme de valeurs autorisée pour  $p$  ou  $s$  sera énoncée explicitement.

On rappelle que, pour  $k \in \mathbb{N}_*$ , l'espace de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $u \in L^p(\Omega)$  dont toutes les dérivées au sens faible jusqu'à l'ordre  $k$  appartiennent également à  $L^p(\Omega)$ . On munit  $W^{k,p}(\Omega)$  de la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^k \|D^i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Les espaces de Sobolev de régularité fractionnaire joueront également un rôle central dans ce travail. Rappelons la définition de la semi-norme de Gagliardo :

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque  $0 < s < 1$ , l'espace de Sobolev fractionnaire  $W^{s,p}(\Omega)$  – également appelé *espace de Sobolev-Slobodskii* – est l'ensemble des fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables telles que  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} < +\infty$ , muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + |u|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Mentionnons que la condition  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} < +\infty$  entraîne que  $u \in L^p(\Omega)$ . En effet, comme  $\Omega$  est supposé borné, nous avons une inégalité de type Poincaré

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |u(x) - u(y)|^p dx dy \leq (\text{diam } \Omega)^{m+sp} |u|_{W^{s,p}(\Omega)}^p < +\infty.$$

Cela implique que

$$\int_{\Omega} |u(x) - u(y)|^p dx < +\infty$$

pour presque tout  $y \in \Omega$ , et permet de conclure que  $u \in L^p(\Omega)$ .

Lorsque  $s > 1$  n'est pas un entier, on peut écrire de façon unique  $s = k + \sigma$  avec  $k \in \mathbb{N}_*$  et  $0 < \sigma < 1$ , et on définit  $W^{s,p}(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  telles que  $D^k u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ , muni de la norme

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + |D^k u|_{W^{\sigma,p}(\Omega)}.$$

On définit de manière analogue les espaces de Sobolev de fonctions à valeurs vectorielles  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . Nous omettrons parfois de mentionner l'espace d'arrivée lorsque celui-ci est clair par le contexte. Ainsi, nous noterons parfois  $W^{s,p}(\Omega)$  au lieu de  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ .

Nous pouvons à présent en venir aux espaces qui donnent son titre à ce travail, les *espaces de Sobolev à valeurs variétés*. Dans la suite de ce texte, sauf mention contraire,  $\mathcal{N}$  désigne une variété riemannienne lisse, compacte, connexe et sans bord, isométriquement plongée dans  $\mathbb{R}^v$ . Le théorème de plongement de Nash assure qu'un tel plongement isométrique existe toujours, pour peu que l'on choisisse  $v$  assez grand ; voir [47] et [48]. On définit  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  comme l'ensemble des fonctions  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  telles que  $u(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Il est utile de préciser que ces espaces ne sont pas des espaces vectoriels, étant donné que l'appartenance à  $\mathcal{N}$  n'a aucune raison d'être préservée par combinaison linéaire.

Néanmoins,  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  est un espace métrique muni de la distance héritée de la norme  $W^{s,p}(\Omega)$  définie par

$$d_{W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})}(u, v) = \|u - v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \text{pour toutes } u, v \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}).$$

On peut montrer que  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  ne dépend pas du choix du plongement à l'isomorphisme naturel près, et que les distances induites sont équivalentes. Plus précisément, si  $i_1: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}^{v_1}$  et  $i_2: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_2 \subset \mathbb{R}^{v_2}$  sont deux plongements isométriques de  $\mathcal{N}$ , alors  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}_1)$  si et seulement si  $i_2 \circ i_1^{-1} \circ u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}_2)$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}_1)$  si et seulement si  $(i_2 \circ i_1^{-1} \circ u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}_2)$ . Ceci peut se démontrer à l'aide du théorème de composition dans les espaces de Sobolev – Théorème 4.4 – que nous énoncerons plus tard dans ce travail. L'objectif de ce texte n'est pas d'étudier la dépendance des différents résultats par rapport au plongement, aussi nous supposerons toujours qu'un plongement a été choisi à l'avance.

Nous terminons ce chapitre par une précision concernant notre convention sur les éléments de  $L^p$  et des espaces construits à partir de  $L^p$ . Nous considérerons toujours qu'une fonction  $u \in L^p$  est une véritable fonction mesurable, et non une classe d'équivalence de telles fonctions identifiées par la relation d'égalité presque partout. Étant donné que nous travaillerons régulièrement avec des restrictions de fonctions  $L^p(\Omega)$  à des ensembles de dimension inférieure à  $m$ , cette convention nous évitera de devoir systématiquement procéder à des extractions de représentants et nous assurer que nos constructions ne dépendent pas du choix ainsi fait. Le prix à payer est que les quantités  $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$  sont uniquement des semi-normes, mais nous commettrons l'abus de notation de les qualifier de normes. Ainsi, deux fonctions mesurables  $u$  et  $v$  satisfont  $\|u - v\|_{W^{s,p}} = 0$  si et seulement si  $u = v$  presque partout.

## 1.2 Argument de généricité

Dans ce mémoire, nous utiliserons souvent des constructions qui nous demanderont de travailler sur des sous-ensembles  $\Sigma \subset \Omega$  de dimension inférieure, tels des portions de droites ou d'hyperplans, ou plus généralement des sous-variétés de  $\Omega$ . Lors de tels raisonnements, nous aurons par exemple besoin de savoir qu'étant donnée  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ , on a  $u \in W^{s,p}(\Sigma)$  pour « la plupart » des choix de  $\Sigma$ , ou qu'étant donnée une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge dans  $W^{s,p}(\Omega)$ , quitte à extraire une sous-suite,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $W^{s,p}(\Sigma)$ . À cette fin, nous présentons l'argument de *généricité*. Nous ne prétendons pas donner de résultat précis et général, mais plutôt illustrer la méthode sur des exemples modèles qui illustrent les différentes situations dans lesquelles nous serons amenés à l'utiliser. Par la suite, nous laisserons au lecteur le soin de s'assurer que l'argument de généricité s'applique bien à chaque fois que nous en ferons usage.

**Exemple 1.1** (Convergence). Considérons une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p((0, 1)^2)$ . Nous allons montrer qu'il existe une sous-suite  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_{n_k}(\cdot, y) \rightarrow u(\cdot, y)$  dans  $L^p((0, 1))$  pour presque tout  $y \in (0, 1)$ .

Choisissons  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de telle sorte que

$$\int_{(0,1)^2} |u_{n_k}(x, y) - u(x, y)|^p \, dx dy \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Le théorème de convergence monotone entraîne que

$$\int_{(0,1)^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_k}(x, y) - u(x, y)|^p \, dx dy < +\infty.$$

Le théorème de Tonelli assure que

$$\int_{(0,1)} \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_k}(x, y) - u(x, y)|^p \, dx < +\infty \quad \text{pour presque tout } y \in (0, 1).$$

Or, pour tout  $y \in (0, 1)$  comme ci-haut, nous avons  $u_{n_k}(\cdot, y) \rightarrow u(\cdot, y)$  dans  $L^p((0, 1))$ , et la conclusion suit.

Cet exemple peut être pensé de façon plus abstraite. En effet, nous pouvons écrire  $L^p((0, 1)^2) = L^p((0, 1); L^p((0, 1)))$ , et notre exemple se reformule de la façon suivante. Nous savons que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p((0, 1); L^p((0, 1)))$ , et nous en déduisons que  $u_{n_k}(y) \rightarrow u(y)$  dans  $L^p((0, 1))$  pour presque tout  $y \in (0, 1)$ , où  $u_{n_k}(y) = u_{n_k}(\cdot, y)$  et  $u(y) = u(\cdot, y)$  sont des éléments de  $L^p((0, 1))$ . Ceci n'est rien d'autre que la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, voir par exemple [57, Proposition 4.2.10], appliquée à un espace de Lebesgue de fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

**Exemple 1.2** (Régularité). Soit  $u \in W^{1,p}((0, 1)^2)$ . Nous souhaitons montrer que  $u(\cdot, y) \in W^{1,p}((0, 1))$  pour presque tout  $y \in (0, 1)$ . Nous prenons soin de justifier l'existence des dérivées faibles, un point qui est souvent omis dans la littérature spécialisée. En effet, tandis qu'il est clair que si  $u$  admet un gradient au sens fort, alors pour *tout*  $y \in (0, 1)$ ,  $u(\cdot, y)$  admet une dérivée au sens fort dans la direction  $x$  donnée par  $\partial_x u(x, y)$ , la dérivabilité au sens faible requiert quant à elle une justification.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $C^\infty(\overline{(0, 1)^2})$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}((0, 1)^2)$  – l'existence d'une telle suite sera rappelée dans le chapitre dédié à l'approximation, voir le Théorème 2.1. L'Exemple 1.1 assure que, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, il existe  $E_1, E_2 \subset (0, 1)$  négligeables tels que pour tout  $y \in (0, 1) \setminus E_1$ , nous avons  $u_n(\cdot, y) \rightarrow u(\cdot, y)$  dans  $L^p((0, 1))$ , et pour tout  $y \in (0, 1) \setminus E_2$ , nous avons  $\partial_x u_n(\cdot, y) \rightarrow \partial_x u(\cdot, y)$  dans  $L^p((0, 1))$ . Posons  $E = E_1 \cup E_2$ , qui est négligeable. En

utilisant le lemme de fermeture – voir par exemple [57, Lemma 6.1.5] – nous déduisons que pour tout  $y \in (0, 1) \setminus E$ ,  $u(\cdot, y)$  admet une dérivée au sens faible donnée par  $\partial_x u(\cdot, y)$  et  $u(\cdot, y), \partial_x u(\cdot, y) \in L^p((0, 1))$ , ce qui permet de conclure.

Nous formulons dès à présent une remarque concernant les fonctions de Sobolev à valeurs variétés. Nous verrons qu'en général, ces fonctions *ne peuvent pas* être approchées par des fonctions lisses en préservant la contrainte variété. Néanmoins, si  $u \in W^{1,p}((0, 1)^2; \mathcal{N})$  dans l'exemple qui précède, il suffit d'approcher  $u$  par une suite dans  $C^\infty(\overline{(0, 1)^2}; \mathbb{R}^v)$  pour pouvoir effectuer le même raisonnement. Un argument supplémentaire est requis pour savoir que  $u(\cdot, y) \in W^{1,p}((0, 1); \mathcal{N})$  et pas seulement  $u(\cdot, y) \in W^{1,p}((0, 1); \mathbb{R}^v)$ . Comme  $u(x, y) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $(x, y) \in (0, 1)^2$ , le théorème de Tonelli fournit un ensemble négligeable  $F \subset (0, 1)$  tel que pour tout  $y \in (0, 1) \setminus F$ ,  $u(x, y) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in (0, 1)$ . Pour tout  $y \in (0, 1) \setminus (E \cup F)$ , nous avons donc  $u(\cdot, y) \in W^{1,p}((0, 1); \mathcal{N})$ .

**Exemple 1.3** (Trace). Comme nous le rappellerons dans le chapitre dédié à l'extension, pour des fonctions  $W^{1,p}$ , la restriction au sens classique sur un sous-ensemble de codimension 1 est une mauvaise notion de restriction, car elle n'est pas stable par modification sur un ensemble négligeable. La bonne notion de restriction est fournie par la *théorie des traces*. Néanmoins, nous aurons souvent besoin de savoir que ces deux notions coïncident sur un sous-ensemble générique, ce qui est l'objet du présent exemple.

Soit  $u \in W^{1,p}((0, 1)^2)$ . Nous allons montrer que pour presque tout  $y \in (0, 1)$ , nous avons  $\text{tr}_{(0,1) \times \{y\}} u = u(\cdot, y)$  presque partout sur  $(0, 1)$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $C^\infty(\overline{(0, 1)^2})$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}((0, 1)^2)$ . Quitte à extraire une sous-suite, il existe  $E \subset (0, 1)$  négligeable tel que  $u_n(\cdot, y) \rightarrow u(\cdot, y)$  dans  $L^p((0, 1))$  pour tout  $y \in (0, 1) \setminus E$ . Or, la continuité de l'opérateur de trace entraîne que  $u_n(\cdot, y) \rightarrow \text{tr}_{(0,1) \times \{y\}} u$  dans  $L^p(0, 1)$  pour tout  $y \in (0, 1)$ . Nous en déduisons que  $\text{tr}_{(0,1) \times \{y\}} u = u(\cdot, y)$  presque partout pour tout  $y \in (0, 1) \setminus E$ , ce qui fournit la conclusion souhaitée.

Dans les exemples qui précèdent, nous avons travaillé avec des sous-ensembles suffisamment simples pour que le théorème de Tonelli classique suffise à obtenir les résultats de généricité souhaités. Pour des ensembles à la géométrie plus compliquée – comme la famille des sphères  $\partial B_r$  dans  $\mathbb{B}^m$  pour  $0 < r < 1$  – il peut être nécessaire d'employer des outils comme la formule d'intégration radiale, ou plus généralement la *formule de la co-aire*.

Nous pouvons bien entendu obtenir plusieurs de ces propriétés à la fois sur un sous-ensemble générique. Par exemple, étant donnée  $u \in W^{1,p}((0, 1)^2)$ , pour presque tout  $y \in (0, 1)$ , nous avons simultanément  $u(\cdot, y) \in W^{1,p}((0, 1))$  et  $\text{tr}_{(0,1) \times \{y\}} u = u(\cdot, y)$ . Il

suffit de combiner plusieurs arguments de généricité et de considérer l'ensemble où toutes les propriétés souhaitées sont vérifiées.

Pour conclure cette section, mentionnons qu'il est possible d'unifier les exemples que nous avons présentés ci-haut. En effet, la généricité s'inscrit dans un cadre plus général lié aux notions d'*applications de Fuglede* et de *détecteurs*; voir [16].

### 1.3 Élargir ou contracter $\Omega$

Une autre technique dont nous ferons souvent usage dans ce mémoire consiste à élargir ou à contracter légèrement le domaine  $\Omega$ . Cela nous sera notamment utile pour pouvoir supposer que les fonctions avec lesquelles nous travaillons sont en fait définies sur un ouvert légèrement plus grand que  $\Omega$ , ou au contraire pour travailler sur un ouvert plus petit que  $\Omega$  afin de conserver une « marge de sécurité » par rapport à  $\partial\Omega$ .

Nous commençons par illustrer notre propos sur un domaine simple, en supposant que  $\Omega = \mathbb{B}^m$ . Étant donné  $\tau > -1$ , nous définissons  $\Psi_\tau: \Omega \rightarrow \Omega_\tau = B_{1+\tau}$  par  $\Psi_\tau(x) = x + \tau x$ . Nous observons que  $\Psi_\tau$  est un difféomorphisme entre  $\Omega$  et  $\Omega_\tau$ , et nous notons  $\Phi_\tau$  son inverse. Nous avons  $\Phi_\tau \rightarrow \text{Id}$  et  $\Psi_\tau \rightarrow \text{Id}$  dans  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ceci nous fournit une famille de difféomorphismes entre  $\mathbb{B}^m$  et des versions élargies ou contractées de  $\mathbb{B}^m$ .

Si  $\Omega$  est un ouvert lisse borné, il est possible de procéder à une construction analogue en utilisant le *vecteur normal* à  $\partial\Omega$ ; voir par exemple [22, Lemma 15.25]. En voici le principe.

On note  $\Omega_\tau = \{x \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(x, \Omega) < \tau\}$  si  $\tau > 0$ ,  $\Omega_\tau = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > |\tau|\}$  si  $\tau < 0$  et  $\Omega_0 = \Omega$ . Observons que  $\Omega_\tau$  est une dilatation de  $\Omega$  si  $\tau > 0$  et une contraction de  $\Omega$  si  $\tau < 0$ .

Au vu de la régularité de  $\Omega$ , il existe un vecteur normal sortant  $\nu_\Omega: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , satisfaisant  $|\nu_\Omega| = 1$  sur  $\partial\Omega$  et  $\nu_\Omega \in C^\infty(\partial\Omega)$ . Lorsque  $\iota > 0$  est suffisamment réduit, en définissant  $V_\iota = \{x \in \mathbb{R}^m : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \iota\}$ , tout point  $x \in V_\iota$  s'écrit de façon unique comme  $x = y + t\nu_\Omega(y)$  avec  $y \in \partial\Omega$  et  $|t| = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ . Nous étendons  $\nu_\Omega$  à  $V_\iota$  en définissant  $\nu_\Omega(y + t\nu_\Omega(y)) = \nu_\Omega(y)$  pour tout  $y \in \partial\Omega$  et tout  $t$  tel que  $|t| < \iota$ .

On fixe  $\psi \in C_c^\infty(V_\iota)$  telle que  $0 \leq \psi \leq 1$  sur  $V_\iota$  et  $\psi = 1$  sur  $\partial\Omega$  et on définit  $\Psi_\tau: \Omega \rightarrow \Omega_\tau$  par  $\Psi_\tau(x) = x + \tau\psi(x)\nu_\Omega(x)$ . Pour peu que  $|\tau|$  soit suffisamment réduit, on vérifie que  $\Psi_\tau$  est un difféomorphisme entre  $\Omega$  et  $\Omega_\tau$ , et on note  $\Phi_\tau$  son inverse.

Lorsque  $\Omega$  est étoilé par rapport à  $a \in \Omega$ , on peut procéder à une construction analogue en remplaçant  $\nu_\Omega(x)$  par  $\frac{x-a}{|x-a|}$ .

Raisonnant ainsi, nous parvenons au lemme suivant. Nous notons  $\omega \Subset \Omega$  lorsque  $\overline{\omega} \subset \Omega$ .

**Lemme 1.4.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un ouvert borné lisse ou étoilé. Pour tout  $\tau$  tel que  $|\tau|$  est suffisamment réduit, il existe un ouvert  $\Omega_\tau$  et un difféomorphisme  $\Phi_\tau: \Omega_\tau \rightarrow \Omega$  tels que*

1.  $\Omega_\tau \Subset \Omega_{\tau'}$  lorsque  $\tau < \tau'$  et  $\Omega_0 = \Omega$ ;
2.  $\Phi_\tau$  admet une extension continue à  $\overline{\Omega_\tau}$ , toujours notée  $\Phi_\tau$ , qui est un difféomorphisme de  $\overline{\Omega_\tau}$  sur  $\overline{\Omega}$ ;
3.  $\|\Phi_\tau - \text{Id}\|_{C^k(\overline{\Omega_\tau})} \rightarrow 0$  et  $\|(\Phi_\tau)^{-1} - \text{Id}\|_{C^k(\overline{\Omega})} \rightarrow 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ .

À l'aide des propriétés des  $\Phi_\tau$ , nous obtenons sans peine le lemme suivant; voir [22, Lemma 15.26].

**Lemme 1.5.** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné lisse ou étoilé et soit  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ . Pour tout  $\tau$  tel que  $|\tau|$  est suffisamment réduit, nous avons  $u \circ \Phi_\tau \in W^{s,p}(\Omega_\tau)$ , et  $\|u \circ \Phi_\tau - u\|_{W^{s,p}(\Omega_{\min\{\tau,0\}})} \rightarrow 0$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ .*



# Chapitre 2

## Introduction au problème de l'approximation

### 2.1 Énoncé et motivation du problème

En tant qu'espaces fonctionnels, les espaces de Sobolev  $W^{s,p}$  jouissent de nombreuses propriétés qui en font un outil particulièrement adapté pour travailler sur un grand nombre de problèmes dans des branches variées de l'analyse mathématique, des équations aux dérivées partielles au calcul des variations. Ces propriétés entraînent qu'il est souvent bien plus confortable de travailler avec ces espaces qu'avec les espaces de fonctions dérivables au sens classique munis de la norme uniforme. En contrepartie, les fonctions dans  $W^{s,p}$  sont parfois plus délicates à manipuler que les fonctions dérivables au sens classique.

Par conséquent, il est souhaitable de pouvoir approximer les éléments de  $W^{s,p}$  par des fonctions plus régulières. Ceci rend applicable la technique suivante. Supposons que l'on veuille prouver une propriété pour tous les éléments de  $W^{s,p}$ . On commence par démontrer qu'elle est vérifiée pour les fonctions lisses. Ensuite, étant donnée  $u$  arbitraire dans  $W^{s,p}$ , on construit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions lisses qui converge vers  $u$  dans  $W^{s,p}$ . Si la propriété considérée est stable par passage à la limite, on peut alors conclure. Le lecteur pourra consulter [17, Chapter 9.1] ou [57, Chapter 6.1] pour voir cette technique employée de façon simple pour étendre aux espaces de Sobolev les règles de calcul différentiel usuelles. Par ailleurs, la Section 1.2 fournit d'autres exemples d'application de cet argument de densité pour déduire des résultats de généralité.

Dans les espaces de Sobolev à valeurs réelles, le théorème de densité assure qu'une telle procédure d'approximation est toujours possible. Nous notons  $C^\infty(\overline{\Omega})$  l'espace des fonctions  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lisses jusqu'au bord de  $\Omega$ , c'est-à-dire telles que  $v$  est la restriction à  $\Omega$  d'une fonction  $w \in C^\infty(\omega)$  pour un certain  $\Omega \Subset \omega$ .

**Théorème 2.1.** *L'espace  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est dense dans  $W^{s,p}(\Omega)$ .*

La démonstration de ce théorème repose sur la notion de régularisation par convolution. Un *noyau régularisant* est une fonction  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  telle que

$$\text{supp } \rho \subset B_1 = B_1(0), \quad \rho \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^m} \rho = 1.$$

Nous pouvons toujours choisir  $\rho$  comme étant de plus une fonction radiale. Étant donné un noyau régularisant  $\rho$  et  $t > 0$ , on définit

$$\rho_t(x) = \frac{1}{t^m} \rho\left(\frac{x}{t}\right).$$

Pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ , le produit de convolution

$$\rho_t * u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x-y) \rho_t(y) \, dy = \int_{B_t} u(x-y) \rho_t(y) \, dy$$

est bien défini et lisse sur tout ouvert  $\omega \Subset \Omega$  dès que  $t < \text{dist}(\omega, \partial\Omega)$  – cette restriction garantissant que  $x-y \in \Omega$  pour tout  $y \in B_t$ . Un résultat classique sur les espaces de Sobolev assure alors que  $\rho_t * u \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\omega)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Dans le cas où  $s \in \mathbb{N}$ , le lecteur pourra consulter [17] ou [57]. Dans le cas fractionnaire, nous renvoyons à [1, Proof of Theorem 7.38] pour un argument basé sur la théorie de l’interpolation, ou [43, Proof of Lemma 21] pour un argument plus élémentaire. Nous pouvons à présent procéder à la preuve du théorème de densité.

*Démonstration.* Soit  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ . Le Lemme 1.4 fournit, pour  $\tau > 0$  suffisamment réduit, un ouvert  $\Omega_\tau$  tel que  $\Omega \Subset \Omega_\tau$  et une fonction  $u_\tau = u \circ \Phi_\tau \in W^{s,p}(\Omega_\tau)$  telle que  $u_\tau \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . Par un argument diagonal, il suffit d’approcher chaque  $u_\tau$  sur  $\Omega$  par une suite de fonctions lisses, et nous pouvons donc supposer dès le départ que  $u \in W^{s,p}(\omega)$  pour un ouvert  $\omega$  tel que  $\Omega \Subset \omega$ . En particulier,  $\text{dist}(\Omega, \partial\omega) > 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < \text{dist}(\Omega, \partial\omega)$ . Pour tout  $0 < t \leq \varepsilon$ , la fonction  $u_t = \rho_t * u$  est bien définie sur  $\Omega$  et  $u_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . De plus,  $u_t \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ , et la conclusion suit.  $\square$

Mentionnons que dans le cas où  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  est un ouvert *quelconque*, sans aucune hypothèse de régularité, le théorème de densité admet un analogue où  $C^\infty(\overline{\Omega})$  est remplacé par l’espace plus grand  $C^\infty(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$ , qui contient également des fonctions lisses singulières au bord de  $\Omega$ . Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Meyers-Serrin*; voir [39]. On pourra aussi consulter [57, Theorem 6.1.17] pour une version de ce résultat due à Hajłasz et permettant d’approximer en préservant la trace au bord du domaine. La preuve repose également sur le produit de convolution,

mais il est nécessaire d'adapter le paramètre de convolution à mesure qu'on se rapproche de  $\partial\Omega$  et de recoller les approximations obtenues à l'aide d'une partition de l'unité.

Motivés par le théorème de densité, nous formulons le problème suivant.

**Problème 1.** L'espace  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  est-il dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  ?

Observons dès à présent qu'on ne peut obtenir une réponse à ce problème par simple adaptation de la preuve du théorème de densité. En effet, la démonstration repose de façon cruciale sur le produit de convolution. Or, étant donné  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  et un noyau régularisant  $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $\rho * u$  peut être vue comme une combinaison convexe de  $u$ . Dès lors, si  $u$  prend ses valeurs dans un sous-ensemble  $F$  de  $\mathbb{R}^v$ ,  $\rho * u$  prend ses valeurs dans l'enveloppe convexe de  $F$  mais son image n'a aucune raison d'être contenue dans  $F$ . Par conséquent, la démonstration du théorème de densité permet d'approximer tout élément de  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  par des fonctions lisses à valeurs dans l'enveloppe convexe de  $\mathcal{N}$  mais ne permet en principe pas de déduire que  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .

Par la suite, il nous sera utile de pouvoir parler de la fermeture de  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Aussi nous introduisons la définition suivante, dans l'esprit de la notation qui était parfois utilisée en théorie classique, et qui a donné son titre à l'article  $H = W$  de Meyers-Serrin [39].

**Définition 2.2.** La classe  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  est la fermeture de  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  :

$$H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})}^{W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})}.$$

Le Problème 1 revient donc à savoir si  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N}) = W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .

## 2.2 Le cas surcritique : $sp > m$

Lorsque  $sp > m$ , la réponse au Problème 1 est toujours affirmative. Ceci se démontre en se ramenant à la théorie des fonctions à valeurs réelles, ce qui est rendu possible par la régularité des fonctions  $W^{s,p}$  dans la gamme surcritique  $sp > m$ . En effet, pour cette gamme de valeurs, le théorème d'injection de Morrey-Sobolev assure que les fonctions de  $W^{s,p}(\Omega)$  sont *continues*.

**Théorème 2.3 (Morrey-Sobolev).** Supposons que  $sp > m$ . Alors  $W^{s,p}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $C^0(\overline{\Omega})$  :  $W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$  et il existe  $C = C(s, p, \Omega) > 0$  telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \text{pour toute } u \in W^{s,p}(\Omega).$$

On trouvera une démonstration de ce théorème dans le cas où  $\Omega$  est de classe  $C^1$  dans [17] et [57] par exemple. On renvoie également à [1] pour une discussion plus précise des hypothèses de régularité requises sur  $\Omega$  et une preuve du cas fractionnaire basée sur l'interpolation, et à [43] pour une démonstration plus élémentaire dans le cas  $0 < s < 1$ .

Il convient d'observer une certaine prudence lorsqu'on emploie le théorème de Morrey-Sobolev. En effet, de façon plus précise, l'injection  $W^{s,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$  signifie que toute fonction dans  $W^{s,p}(\Omega)$  coïncide presque partout avec une fonction dans  $C^0(\overline{\Omega})$ . En outre, nous utiliserons souvent la continuité de l'injection pour déduire que  $u_n \rightarrow u$  uniformément lorsque que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ . À nouveau, ceci est vrai *pour peu qu'on sache à l'avance que les  $u_n$  ainsi que  $u$  sont continues*, ce qui peut nécessiter de modifier les  $u_n$  et  $u$  sur un ensemble de mesure nulle. Par la suite, ces considérations seront parfois gardées implicites dans nos raisonnements, mais nous invitons le lecteur à toujours conserver cet avertissement à l'esprit.

Considérons  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Le Théorème 2.1 assure l'existence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^v)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . En vertu de l'injection de Morrey-Sobolev, quitte à modifier  $u$  sur un ensemble de mesure nulle, on en déduit que  $u_n \rightarrow u$  uniformément. Dès lors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\|u_n - u\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ . En particulier,  $\text{dist}(u_n(x), \mathcal{N}) \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in \Omega$ . Par conséquent, nous pouvons approcher tout élément de  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  par des fonctions lisses prenant des valeurs uniformément proches de  $\mathcal{N}$ . Pour obtenir des fonction lisses à valeurs dans  $\mathcal{N}$  comme requis, nous introduisons la notion de *voisinage tubulaire* d'une variété.

**Théorème 2.4.** *Supposons que  $\mathcal{N}$  est de classe  $C^k$  avec  $k \geq 2$ . Alors il existe  $\iota > 0$  tel que, si on pose  $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^v : \text{dist}(x, \mathcal{N}) < \iota\}$ , la projection sur le point le plus proche  $\Pi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N}$  est bien définie et de classe  $C^{k-1}$ .*

Un tel ouvert sera par la suite appelé un *voisinage tubulaire* de  $\mathcal{N}$  de rayon  $\iota$ . La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de la fonction inverse. Le lecteur pourra par exemple consulter [29].

**Exemple 2.5.** Supposons que  $\mathcal{N}$  est la sphère unité de dimension  $\ell$ , vue comme l'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^{\ell+1}$  de norme égale à 1 :  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ . On pourra alors construire la projection sur le point le plus proche  $\Pi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N}$  en définissant  $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^{\ell+1} : |x| > \frac{1}{2}\}$  et  $\Pi(x) = \frac{x}{|x|}$ .

Si nous choisissons  $\varepsilon < \iota$ , alors  $v_n = \Pi \circ u_n$  est bien définie et à valeurs dans  $\mathcal{N}$  pour tout  $n \geq n_0$ . De plus, comme  $\mathcal{N}$  est supposée lisse, nous savons que  $\Pi$  est lisse, et par conséquent  $v_n \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  et  $v_n \rightarrow \Pi \circ u = u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  – voir le paragraphe qui suit la Proposition 2.6. Ceci prouve que tout élément de  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  peut être approché par une suite de fonctions lisses à valeurs dans  $\mathcal{N}$ . Pour résumer, nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 2.6.** *Supposons que  $sp > m$ . L'espace  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .*

Notons que dans notre raisonnement, nous avons utilisé le fait que la composition  $\Pi \circ u_n$  est dans  $W^{s,p}$  et converge vers  $\Pi \circ u$  dans  $W^{s,p}$  lorsque  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}$ . Lorsque  $s = 1$ , cela suit aisément de la régularité de  $\Pi$  et de la définition de  $W^{s,p}$ . Pour des valeurs générales de  $s$  et de  $p$ , ce résultat est loin d'être trivial et découle de la continuité de l'opérateur de composition sur les espaces de Sobolev, que nous introduirons ultérieurement; voir le Théorème 4.4 et la remarque qui suit.

## 2.3 Le cas critique : $sp = m$

Dans le cas où  $sp = m$ , l'injection de  $W^{s,p}$  dans  $C^0$  n'est pas valide. Cependant, en raisonnant de façon plus précise, il est possible d'adapter l'argument employé dans le cas surcritique, ce qui conduit au résultat suivant.

**Proposition 2.7.** *Supposons que  $sp = m$ . L'espace  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .*

Ceci fut observé pour la première fois par Schoen et Uhlenbeck [55], et fut clarifié ensuite par les travaux de Brezis et Nirenberg [23] en lien avec l'espace VMO des fonctions d'*oscillation moyenne évanescence*. Bien qu'il ne soit pas indispensable d'introduire cet espace pour démontrer la Proposition 2.7, nous pensons que l'éclairage apporté par celui-ci vaut la peine d'accomplir ce détour.

Nous commençons par définir l'espace BMO des fonctions d'*oscillation moyenne bornée*. Étant donnée  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , on définit la moyenne  $(u)_{B_r(a)}$  de  $u$  sur une boule  $B_r(a) \Subset \Omega$  par

$$(u)_{B_r(a)} = \int_{B_r(a)} u = \frac{1}{|B_r(a)|} \int_{B_r(a)} u.$$

**Définition 2.8.** *L'espace  $\text{BMO}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  satisfaisant  $\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)} < +\infty$ , où*

$$\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)} = \sup_{B_r(a) \Subset \Omega} \int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| dx.$$

*L'espace  $\text{BMO}(\Omega; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $u \in \text{BMO}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  telles que  $u(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .*

Mentionnons qu'au vu de la régularité que nous supposons pour  $\Omega$ , les fonctions  $\text{BMO}(\Omega)$  sont dans  $L^1(\Omega)$ .

La quantité  $\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)}$  ne constitue pas une norme sur  $\text{BMO}(\Omega)$ , mais il s'agit d'une semi-norme qui s'annule si et seulement si  $u$  est constante. Une semi-norme équivalente est donnée par la quantité

$$\sup_{B_r(a) \in \Omega} \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)| \, dx dy,$$

qui vérifie

$$\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)} \leq \sup_{B_r(a) \in \Omega} \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)| \, dx dy \leq 2\|u\|_{\text{BMO}(\Omega)}.$$

Nous pouvons à présent définir l'espace VMO des fonctions d'*oscillation moyenne évanescence*.

**Définition 2.9.** L'espace  $\text{VMO}(\Omega)$  est la fermeture de  $C_c(\Omega)$  dans  $\text{BMO}(\Omega)$ . L'espace  $\text{VMO}(\Omega; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $u \in \text{VMO}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  telles que  $u(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \Omega$ .

Il sera souvent plus commode de travailler avec la caractérisation suivante de VMO due à Sarason [54].

**Proposition 2.10.** Une fonction  $u \in \text{BMO}(\Omega)$  appartient à  $\text{VMO}(\Omega)$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tous  $0 < r \leq \delta$  et  $a \in \Omega$  tels que  $B_r(a) \Subset \Omega$ ,

$$\int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| \, dx \leq \varepsilon.$$

De même que pour BMO, on peut remplacer la quantité  $\int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| \, dx$  par  $\int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)| \, dx dy$  dans la proposition qui précède.

Comme nous l'avons mentionné,  $W^{s,p}$  ne s'injecte pas dans  $C^0$  lorsque  $sp = m$ . Cependant, dans ce cas critique, l'espace VMO constitue le remplaçant adéquat pour  $C^0$ ; voir [23, Exemples 1 and 2].

**Proposition 2.11.** Supposons que  $sp = m$ . Alors  $W^{s,p}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $\text{VMO}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Nous distinguons plusieurs cas. Commençons par supposer que  $p = m$  et  $s = 1$ . Rappelons l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir par exemple [17] ou [57]) :

$$\int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| \, dx \leq C_1 r \int_{B_r(a)} |\nabla u(x)| \, dx.$$

Notons que la dépendance de la constante par rapport à  $r$  s'obtient par un argument de changement d'échelle. L'inégalité de Hölder entraîne que

$$\int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| dx \leq C_2 r^m \left( \int_{B_r(a)} |\nabla u(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

On en déduit que

$$\int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| dx \leq C_3 \left( \int_{B_r(a)} |\nabla u(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Comme  $\nabla u \in L^m(\Omega)$ , ceci assure que  $u \in \text{BMO}(\Omega)$ . De plus, en faisant  $r \rightarrow 0$ , par le lemme de Lebesgue – voir par exemple [57, Proposition 3.1.7] – on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{0 < r \leq \delta \\ B_r(a) \subset \Omega}} \int_{B_r(a)} |u(x) - (u)_{B_r(a)}| dx \rightarrow 0,$$

ce qui montre que  $u \in \text{VMO}(\Omega)$ . Une façon de penser à la limite que nous avons écrite est de dire qu'elle découle de l'équi-intégrabilité des singletons.

Supposons à présent que  $s \geq 1$ . Comme  $sp = m$ , on a  $(s-1)p < m$ , et on déduit alors du théorème d'injection de Sobolev (voir [17] ou [57] pour le cas où  $s$  est entier et [1] pour le cas fractionnaire) que  $W^{s,p}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $W^{1,p^*}(\Omega)$ , où  $p^* = \frac{mp}{m-(s-1)p} = m$ . On conclut à l'aide du premier cas.

Il reste à traiter le cas  $0 < s < 1$ . L'inégalité de Jensen assure que

$$\begin{aligned} \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)| dx dy &\leq \left( \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{2m}} (2r)^{2m} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $sp = m$ , nous écrivons

$$\int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} |u(x) - u(y)| dx dy \leq C_4 \left( \int_{B_r(a)} \int_{B_r(a)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ , on conclut comme dans le premier cas que  $u \in \text{VMO}(\Omega)$ .  $\square$

À l'aide de cette injection, nous pouvons à présent démontrer la Proposition 2.7.

*Démonstration de la Proposition 2.7.* Soit  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , et soit  $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  un noyau

régularisant. En utilisant le Lemme 1.4, nous pouvons supposer que  $u \in W^{s,p}(\omega; \mathcal{N})$  pour un certain  $\Omega \Subset \omega$ . Soit  $0 < \varepsilon < \text{dist}(\Omega, \partial\omega)$ . Pour  $0 < t < \varepsilon$ , définissons  $u_t = u * \rho_t$ , de telle sorte que  $u_t \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Contrairement au cas surcritique, on ne peut pas conclure que  $u_t \rightarrow u$  uniformément. Néanmoins, il reste possible de montrer que  $u_t$  est uniformément proche de  $\mathcal{N}$  pour  $t$  suffisamment petit, ce qui suffit pour recourir à nouveau à la projection sur le point le plus proche.

En effet, comme  $u(y) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $y \in \omega$ , on a  $\text{dist}(u_t(x), \mathcal{N}) \leq |u_t(x) - u(y)|$  pour tout  $x \in \Omega$  et presque tout  $y \in \omega$ . En intégrant, il vient

$$\text{dist}(u_t(x), \mathcal{N}) \leq \int_{B_r(x)} |u_t(x) - u(y)| \, dy$$

pour tout  $0 < r < \varepsilon$ . Par définition de  $u_t$ , on calcule

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |u_t(x) - u(y)| \, dy &= \int_{B_r(x)} \left| \int_{\mathbb{R}^m} u(z) \rho_t(x-z) \, dz - u(y) \right| \, dy \\ &\leq \int_{B_r(x)} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |u(z) - u(y)| \rho_t(x-z) \, dz \right) \, dy. \end{aligned}$$

Comme  $\text{supp } \rho_t \subset B_t$  et  $\rho_t \leq C_1 \frac{1}{t^m}$ , on obtient

$$\int_{B_r(x)} |u_t(x) - u(y)| \, dy \leq C_2 \int_{B_r(x)} \left( \int_{B_t(x)} |u(z) - u(y)| \, dz \right) \, dy.$$

En choisissant  $r = t$ , on déduit de l'injection  $W^{s,p} \subset \text{VMO}$  que

$$\text{dist}(u_t(x), \mathcal{N}) \leq C_2 \int_{B_t(x)} \left( \int_{B_t(x)} |u(z) - u(y)| \, dz \right) \, dy \rightarrow 0$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ , uniformément par rapport à  $x$ . Nous pouvons alors conclure comme dans la preuve de la Proposition 2.6 : pour  $t$  suffisamment petit,  $v_t = \Pi \circ u_t$  est bien définie, lisse, à valeurs dans  $\mathcal{N}$ , et  $v_t \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}$ .  $\square$

## 2.4 Une obstruction topologique

Nous concluons ce chapitre par un contre-exemple suggérant que la réponse au problème d'approximation pour les fonctions de Sobolev à valeurs variétés n'est pas aussi tranchée que dans le cas réel. Pour des fonctions à valeurs réelles, le théorème de densité garantit que la réponse au problème d'approximation est positive pour toutes valeurs de  $p$  et  $s$ . Dans le cas des fonctions à valeurs variétés, des obstructions topologiques émergent.

Avant de présenter le contre-exemple annoncé, il est nécessaire de rappeler quelques notions de *théorie de l'homotopie*.

**Définition 2.12.** Soient  $f, g: X \rightarrow Y$  deux applications continues entre les espaces topologiques  $X$  et  $Y$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes lorsqu'il existe  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continue telle que  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = g$ , et on note  $f \sim g$ .

Intuitivement,  $f \sim g$  signifie que  $f$  peut-être déformée continûment en  $g$ . Remarquons que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence. Nous illustrons cette notion par un exemple simple mais qui nous sera d'une grande utilité par la suite.

**Exemple 2.13.** Soit  $\ell \in \mathbb{N}$  et soit  $f: \mathbb{S}^\ell \rightarrow X$  une application continue, où  $X$  est un espace topologique quelconque. Si  $f$  est la restriction à  $\mathbb{S}^\ell$  d'une application continue  $g: \mathbb{B}^{\ell+1} \rightarrow X$ , alors  $f$  est homotope à une application constante. En effet, il suffit de définir  $H: \mathbb{S}^\ell \times [0, 1] \rightarrow X$  par  $H(x, t) = g(tx)$  pour obtenir une homotopie de  $x \mapsto g(0)$  à  $f$ .

La proposition suivante assure que deux applications continues à valeurs dans une variété compacte sont homotopes dès qu'elles sont suffisamment proches pour la distance uniforme.

**Proposition 2.14.** Soient  $X \subset \mathbb{R}^m$  un espace topologique et  $f, g: X \rightarrow \mathcal{N}$  deux fonctions continues. Soit  $\mathcal{O}$  un voisinage tubulaire de  $\mathcal{N}$  de rayon  $\iota$ . Si  $\|f - g\|_{L^\infty(X)} < \iota$ , alors  $f$  et  $g$  sont homotopes.

*Démonstration.* Nous souhaiterions définir  $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ , mais rien n'assure que  $H$  soit à valeurs dans  $\mathcal{N}$ . Cependant, par hypothèse, nous avons

$$\begin{aligned} \text{dist}((1 - t)f(x) + tg(x), \mathcal{N}) &\leq |(1 - t)f(x) + tg(x) - f(x)| \\ &\leq t|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|_{L^\infty(X)} < \iota \end{aligned}$$

pour tous  $x \in X$  et  $t \in [0, 1]$ , et nous pouvons alors définir  $H(x, t) = \Pi((1 - t)f(x) + tg(x))$ , ce qui fournit l'homotopie souhaitée.  $\square$

Nous pouvons à présent fournir un exemple d'une application de Sobolev à valeurs variété qui ne peut pas être approchée par une suite de fonctions lisses en préservant la contrainte variété.

**Exemple 2.15.** Considérons  $\Omega = \mathbb{B}^2$ , et définissons sur  $\Omega$

$$u(x) = \frac{x}{|x|}.$$

On observe que  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  pour tout  $1 \leq p < 2$ . En effet, comme  $u$  est à valeurs dans  $\mathbb{S}^1$  par construction, nous avons  $u \in L^\infty(\Omega)$  et donc  $u \in L^p(\Omega)$ . De plus, on calcule que

$$Du(x) = \frac{1}{|x|}I - \frac{x \otimes x}{|x|^3},$$

et donc

$$|Du(x)| \leq \frac{C}{|x|}.$$

Dès lors,  $Du \in L^p(\Omega)$  pour tout  $1 \leq p < 2$ , montrant que  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ .

Nous affirmons que, étant donné  $1 \leq p < 2$ , il n'existe aucune suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{S}^1)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}$ . En effet, supposons par l'absurde qu'une telle suite existe. Par un argument de généricité, quitte à passer à une sous-suite,  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\partial B_r)$  pour presque tout  $0 < r < 1$ . Choisissons donc  $0 < r < 1$  tel que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\partial B_r)$ . Comme  $p \geq 1$  et comme les  $u_n$  et  $u$  sont continues, l'injection de Morrey-Sobolev entraîne que  $u_n \rightarrow u$  uniformément sur  $\partial B_r$ . (Notons qu'en dimension 1, l'injection de Morrey-Sobolev est valide y compris dans le cas critique  $W^{1,1}$ .)

Les fonctions  $u_n|_{\partial B_r}$  étant la restriction à  $\partial B_r$  de fonctions continues sur  $\overline{B_r}$ , elles sont homotopes à une fonction constante. Comme  $u_n \rightarrow u$  uniformément sur  $\partial B_r$ , la Proposition 2.14 assure que  $u$  est homotope à une constante, ce qui contredit le fait que l'identité sur  $\mathbb{S}^1$  n'est pas homotope à une constante. On en conclut que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut exister.

Cet exemple n'a rien de spécifique à  $\mathbb{B}^2$  et  $\mathbb{S}^1$ . Au contraire, il s'agit d'un cas particulier d'une obstruction topologique bien plus profonde, liée au groupe fondamental de la variété cible  $\mathcal{N}$ . Dans notre construction, nous avons utilisé de façon cruciale l'existence d'une fonction  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dont la classe d'homotopie est non triviale, i.e. non homotope à une constante. Pour généraliser cette obstruction, nous introduisons la notion de *groupe d'homotopie*.

**Définition 2.16.** Soit  $\ell \in \mathbb{N}$  et soit  $X$  un espace topologique. On définit le  $\ell$ -ième groupe d'homotopie de  $X$  comme l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues  $\mathbb{S}^\ell \rightarrow X$ , et on le note  $\pi_\ell(X)$ . Autrement dit,

$$\pi_\ell(X) = C^0(\mathbb{S}^\ell; X)/\sim,$$

où  $\sim$  est la relation d'homotopie introduite dans la Définition 2.12.

En topologie algébrique, comme son nom l'indique, le groupe d'homotopie  $\pi_\ell(X)$  est un ensemble muni d'une structure de groupe. Dans ce travail, la structure de

groupe de  $\pi_\ell(X)$  ne jouera aucun rôle, aussi nous nous contentons de définir l'ensemble sous-jacent. Par la suite, nous serons principalement intéressés par la trivialité du groupe d'homotopie. Pour le lecteur peu familier avec la topologie algébrique, ceci peut se comprendre sans définir le groupe d'homotopie. En effet, le  $\ell$ -ième groupe d'homotopie de  $X$  est trivial – ce que nous notons  $\pi_\ell(X) = \{0\}$  – si et seulement si toute application continue  $f: \mathbf{S}^\ell \rightarrow X$  est homotope à une application constante.

**Exemple 2.17.** L'exemple privilégié pour illustrer la notion de groupes d'homotopie consiste à prendre  $\mathcal{N} = \mathbf{S}^\ell$ . Dans ce cas, nous avons  $\pi_k(\mathbf{S}^\ell) = \{0\}$  si  $k < \ell$ , et  $\pi_\ell(\mathbf{S}^\ell) = \mathbb{Z}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , un représentant de la  $n$ -ième classe d'homotopie dans  $\pi_\ell(\mathbf{S}^\ell)$  s'obtient en prenant l'application qui « tourne  $n$  fois autour de  $\mathbf{S}^\ell$  ». Par exemple, pour  $\ell = 1$ , il suffit de définir  $f_n: \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$  par  $f_n(e^{it}) = e^{int}$ . La détermination des groupes d'homotopie de  $\mathbf{S}^\ell$  pour  $k > \ell$  s'avère bien plus délicate, même si on cherche uniquement à savoir si  $\pi_k(\mathbf{S}^\ell)$  est trivial ou non – il suffit de consulter une table d'homotopie des sphères, que l'on trouvera par exemple dans [35, Section 4.1], pour s'en apercevoir.

Dans l'Exemple 2.15, nous avons  $\pi_1(\mathbf{S}^1) \neq \{0\}$ . Une généralisation (non triviale) de l'argument que nous avons employé, en remplaçant l'identité sur  $\mathbf{S}^1$  par une application continue  $f: \mathbf{S}^{[sp]} \rightarrow \mathcal{N}$  dont la classe d'homotopie est non triviale, permet d'obtenir une obstruction générale à l'approximation. Ici,  $[sp]$  désigne la partie entière de  $sp$ .

**Théorème 2.18.** *Si  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , alors  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  n'est pas dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .*

Ce résultat fut observé pour la première fois par Schoen et Uhlenbeck [55] pour des applications à valeurs dans la sphère. Il fut ensuite démontré par Bethuel et Zheng [8, Theorem 2] dans le cas où  $\Omega = \mathbb{B}^m$  et  $s = 1$ , mais la méthode se généralise à  $s$  arbitraire; voir par exemple [27] et [41]. Ce théorème fournit une condition nécessaire pour que la réponse au problème d'approximation soit positive, formulée en termes de la topologie de la variété cible.



# Chapitre 3

## Introduction au problème des traces et de l'extension

### 3.1 Énoncé et motivation du problème

Comme nous l'avons déjà évoqué, un des contextes d'application privilégiés pour les espaces de Sobolev est la théorie des équations aux dérivées partielles. Lors de l'étude de ces problèmes, une notion importante est celle de *condition au bord*. Plus précisément, considérons le problème de trouver une fonction  $u$  solution d'une équation aux dérivées partielles dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . Pour que le problème soit bien posé, il est en général nécessaire de prescrire une condition au bord de la forme  $u = g$  sur  $\partial\Omega$ , où  $g$  est une fonction définie sur  $\partial\Omega$  connue à l'avance. De telles conditions sont naturelles pour des équations provenant d'applications pratiques, notamment pour la physique. Si  $u$  décrit la configuration d'une membrane élastique, cela revient à prescrire la position du bord de la membrane, en la fixant à un cadre rigide par exemple. Si  $u$  est la vitesse d'un fluide dans un contenant  $\Omega$ , la condition dite *de Dirichlet*  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  signifie simplement que le fluide demeure immobile le long des parois du contenant.

Lorsqu'on recherche  $u$  parmi un espace de fonctions continues voire différentiables au sens classique, cette condition signifie simplement que la restriction de  $u$  à  $\partial\Omega$  doit coïncider avec  $g$ . Mais lorsque  $u$  est à rechercher parmi un espace de Lebesgue ou de Sobolev, il est plus délicat de donner un sens à cette condition. En effet, les éléments de ces espaces sont définis à un ensemble de mesure nulle près, et comme  $\partial\Omega$  est négligeable dès que  $\Omega$  est un ouvert suffisamment régulier, il ne fait *a priori* pas sens de parler de leur restriction à  $\partial\Omega$ . Même dans notre cadre de travail où les fonctions de Sobolev sont définies partout, et non quotientées par la relation d'égalité presque partout, il est souhaitable d'avoir une notion de restriction stable par modification sur un ensemble de mesure nulle.

La recherche d'une notion raisonnable de restriction pour les fonctions de Lebesgue ou de Sobolev conduit au problème des *traces*. Comme le montre le théorème suivant,

contrairement aux éléments de  $L^p(\Omega)$ , les éléments de  $W^{1,p}(\Omega)$  ont une trace sur  $\partial\Omega$ .

**Théorème 3.1.** *Il existe un unique opérateur linéaire continu  $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ , appelé opérateur de trace, tel que  $\text{tr } u = u|_{\partial\Omega}$  pour toute  $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ . De plus, si  $p > 1$ , alors  $\text{tr } u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  pour toute  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .*

Ce théorème repose sur le principe d'extension par densité. On commence par montrer que  $\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  pour toute  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  à l'aide du théorème de la divergence, et on en déduit que l'opérateur de restriction possède une unique extension continue à  $W^{1,p}(\Omega)$ . La seconde partie du théorème repose sur un calcul basé sur l'inégalité de Hardy. On renvoie à [25] ou [52] pour plus de détails.

La réponse au problème des traces pour les fonctions de Sobolev à valeurs variétés suit de la théorie des traces pour les fonctions à valeurs réelles.

**Proposition 3.2.** *L'opérateur de trace satisfait  $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N}) \rightarrow L^p(\partial\Omega; \mathcal{N})$ . Si de plus  $p > 1$ , alors  $\text{tr}: W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N}) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ .*

L'existence de l'opérateur de trace ainsi que la régularité de  $\text{tr } u$  sont des conséquences immédiates de la théorie réelle, en observant que  $W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N}) \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . Le réel apport de cette proposition est d'assurer que la trace préserve la contrainte variété. Comme cette contrainte n'est imposée qu'en dehors d'un ensemble de mesure nulle et que  $\partial\Omega$  est négligeable, une justification est requise.

*Démonstration.* Choisissons  $\delta > 0$  suffisamment réduit pour que tout  $\tau$  tel que  $|\tau| \leq \delta$  soit admissible pour le Lemme 1.4. Par un argument de généricité, pour presque tout  $-\delta < \tau < 0$ , nous avons simultanément  $\text{tr}_{\partial\Omega_\tau} u = u|_{\partial\Omega_\tau}$  et  $u|_{\partial\Omega_\tau}(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \partial\Omega_\tau$  par rapport à la mesure  $(m-1)$ -dimensionnelle sur  $\partial\Omega_\tau$ . Définissons  $u_\tau = u \circ (\Phi_\tau)^{-1}$ , de telle sorte que  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  et  $(\text{tr } u_\tau) \circ \Phi_\tau = \text{tr}_{\partial\Omega_\tau} u$ . De plus, nous avons  $u_\tau \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . La continuité de la trace entraîne que  $\text{tr } u_\tau \rightarrow \text{tr } u$  dans  $L^p(\partial\Omega; \mathbb{R}^v)$  lorsque  $\tau \rightarrow 0$ . En utilisant la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, nous obtenons donc une suite  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $-\delta < \tau_n < 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\tau_n \rightarrow 0$  qui satisfait  $\text{tr } u_{\tau_n}(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \partial\Omega$  et  $\text{tr } u_{\tau_n} \rightarrow \text{tr } u$  presque partout sur  $\partial\Omega$ . Ceci implique que  $\text{tr } u(x) \in \mathcal{N}$  pour presque tout  $x \in \partial\Omega$ , et la conclusion suit.  $\square$

Après ces considérations, il est naturel de s'intéresser au problème réciproque du problème des traces, à savoir le problème de l'extension. Une motivation naturelle pour l'étude de cette question provient d'un autre contexte où les espaces de Sobolev

sont omniprésents, le calcul des variations. Un problème typique de ce domaine est le problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p : u \in W^{1,p}(\Omega), u = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \quad (3.1)$$

où  $g \in L^p(\partial\Omega)$  est donnée et où la contrainte est entendue au sens des traces. Avant de rechercher une solution pour ce problème de minimisation, il est nécessaire de s'assurer que l'ensemble des fonctions admissibles est non vide. Autrement dit, nous voudrions savoir s'il existe au moins une fonction  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  dont la trace sur  $\partial\Omega$  est  $g$ . La réponse est donnée par le théorème suivant, dû à Gagliardo [30].

**Théorème 3.3.** *Supposons que  $1 < p < +\infty$ . Pour toute  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , il existe  $U \in W^{1,p}(\Omega)$  telle que  $\text{tr } U = u$  sur  $\partial\Omega$ . De plus, nous pouvons choisir  $U$  de telle sorte que  $U \in C^\infty(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Pour éviter les difficultés liées à la nécessité de travailler en cartes locales sur  $\partial\Omega$ , on présente la preuve avec  $\Omega = \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$ . Soit  $\rho : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$  un noyau régularisant. Définissons  $v : \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$  par

$$v(x, t) = \rho_t * u(x) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \rho_t(x - y)u(y) dy,$$

où on rappelle que  $\rho_t(x) = \frac{1}{t^{m-1}}\rho\left(\frac{x}{t}\right)$ . Comme  $u \in L^p(\mathbb{R}^{m-1})$ , nous avons  $v(\cdot, t) \in L^p(\mathbb{R}^{m-1})$  avec  $\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})}$  pour tout  $t > 0$ ; voir par exemple [57, Proposition 4.3.14].

Montrons à présent que  $\nabla v \in L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))$ . Comme  $\rho_t$  est à support compact dans  $\mathbb{R}^{m-1}$ , on déduit du théorème de la divergence que

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \nabla \rho_t = 0.$$

D'autre part, comme  $\rho_t$  est d'intégrale 1 sur  $\mathbb{R}^{m-1}$  pour tout  $t > 0$ , en dérivant sous le signe intégral, on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{d\rho_t}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \rho_t = 0.$$

Par conséquent, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^{m-1}$ , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} D\rho_t(x - y)u(x) dy = 0,$$

où on a noté  $D\rho_t$  la dérivée totale de  $(x, t) \mapsto \rho_t(x)$ . Ceci entraîne que

$$\begin{aligned}\nabla v(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} D\rho_t(x-y)u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} D\rho_t(x-y)(u(y) - u(x)) dy \\ &= \int_{B_t(x)} D\rho_t(x-y)(u(y) - u(x)) dy.\end{aligned}$$

En intégrant, nous obtenons donc *via* l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))}^p &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left| \int_{B_t(x)} D\rho_t(x-y)(u(y) - u(x)) dy \right|^p dx dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( \int_{B_t(x)} |u(y) - u(x)|^p dy \right) \left( \int_{B_t(x)} D\rho_t(x-y)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} dx dt.\end{aligned}$$

Nous estimons

$$|D\rho_t| \leq C_1 \frac{1}{t^m} \quad \text{sur } B_t(0),$$

et donc

$$\left( \int_{B_t(x)} D\rho_t(x-y)^{p'} dy \right)^{\frac{p}{p'}} \leq C_2 \frac{1}{(t^{p'm-m+1})^{\frac{p}{p'}}} = C_2 \frac{1}{t^{m+p-1}}.$$

À l'aide du théorème de Tonelli, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))}^p &\leq C_2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{B_t(x)} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{t^{m+p-1}} dy dx dt \\ &= C_2 \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( \int_{|x-y|}^{+\infty} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{t^{m+p-1}} dt \right) dx dy \\ &= C_3 \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|x-y|^{m+p-2}} dx dy = C_3 |u|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{R}^{m-1})}^p.\end{aligned}$$

La fonction  $v$  que nous avons construite satisfait donc l'estimation adéquate pour le gradient, mais n'a aucune raison d'être dans  $L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))$ . Nous corrigeons cela en définissant  $U(x, t) = \eta(t)v(x, t)$ , où  $\eta: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse à support compact telle que  $\eta = 1$  sur un voisinage de 0.

D'une part, comme  $\|v(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})}$ , nous trouvons  $\|U\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))} \leq C_4 \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})}$ . D'autre part, par la règle de dérivée du produit, nous estimons

$$\|\nabla U\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))}^p \leq C_5 \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{m-1})} + |u|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{R}^{m-1})}^p \right).$$

On en conclut que  $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))$ . Le fait que  $U \in C^\infty(\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty))$  suit

de sa construction, reposant sur un produit de convolution.

Il reste à prouver que  $\text{tr } U = u$ . À cette fin, choisissons une suite  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de nombres strictement positifs tendant vers 0. Par la continuité des translations dans  $L^p$ , la suite de fonctions lisses  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  définie par  $U_i(x, t) = U(x, t + \varepsilon_i)$  converge vers  $U$  dans  $W^{1,p}$  lorsque  $i \rightarrow +\infty$ . D'autre part, par la propriété d'approximation par convolution,  $U_i(\cdot, 0) \rightarrow u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^{m-1})$ . La continuité de l'opérateur de trace permet de conclure que  $\text{tr } U = u$ .  $\square$

Nous avons suivi la preuve de [52, Proposition 15.12], notamment parce que la technique utilisée nous sera utile par la suite. Cependant, d'autres méthodes d'extension sont possibles, notamment en utilisant l'extension harmonique ; voir par exemple [25]. En outre, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'on peut choisir  $U \in C^\infty(\Omega)$ , mais en général on ne peut pas prendre  $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Autrement dit, l'extension peut être supposée lisse loin du bord, mais pas jusqu'au bord, puisque la donnée au bord est seulement supposée de régularité  $W^{1-\frac{1}{p},p}$ .

Ce théorème stipule que l'opérateur trace est surjectif de  $W^{1,p}(\Omega)$  à  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ . Symboliquement, nous écrivons  $\text{tr } W^{1,p}(\Omega) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ . Par contraste, la trace n'est pas surjective de  $W^{1,p}(\Omega)$  à  $L^p(\partial\Omega)$  puisque  $\text{tr } u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  pour toute  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , tandis que  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$  comme l'illustre l'Exemple 3.4 ci-dessous. Ceci constitue une des motivations pour l'étude des espaces de Sobolev fractionnaires, puisqu'il s'agit de la cible appropriée pour l'opérateur de trace. Dans l'étude du problème (3.1), l'ensemble admissible est donc non vide exactement lorsque  $g \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ .

**Exemple 3.4.** Dans cet exemple, nous montrons que  $W^{s,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$  pour  $0 < s < 1$ . Supposons sans perte de généralité que  $0 \in \Omega$ , et définissons  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par  $u(x) = |x|^{-\alpha}$ , où  $\alpha > 0$  est à déterminer. Nous savons que  $u \in L^p(\Omega)$  si et seulement si  $\alpha < \frac{m}{p}$ .

À présent, comme  $\Omega$  est ouvert, borné et contient 0, il existe  $0 < r < R$  tels que  $B_r \subset \Omega \subset B_R$ . Nous calculons

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \int_{B_R} \int_{B_R} \frac{||x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy.$$

Après une mise à l'échelle, pour  $\lambda > 0$ , nous obtenons

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \lambda^{\alpha p + m + sp - 2m} \int_{B_{\lambda R}} \int_{B_{\lambda R}} \frac{||x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy.$$

En choisissant  $\lambda < \frac{r}{R} < 1$ , nous déduisons

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq \lambda^{\alpha p + sp - m} \int_{B_r} \int_{B_r} \frac{||x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy \leq \lambda^{\alpha p + sp - m} |u|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Prenons  $\alpha$  tel que  $\alpha p + sp - m \geq 0$ . Si  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} < +\infty$ , comme  $\lambda < 1$ , on trouve  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$ , une contradiction. Donc  $u \notin W^{s,p}(\Omega)$ .

Par conséquent, si nous prenons  $\frac{m-sp}{p} \leq \alpha < \frac{m}{p}$ , alors nous avons  $u \in L^p(\Omega)$  mais  $u \notin W^{s,p}(\Omega)$ , ce qui montre que  $W^{s,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$ .

L'analogie du Théorème 3.3 pour  $p = 1$  reste valide, en remplaçant  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  par  $L^1(\partial\Omega)$ . Ce résultat est également dû à Gagliardo [30]; le lecteur pourra également en trouver une preuve élégante dans [42].

Considérons à présent le problème analogue pour des fonctions de Sobolev à valeurs variétés. Étant donnée  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ , nous souhaiterions savoir s'il est possible d'étendre  $u$  à  $\Omega$  par une fonction toujours à valeurs dans  $\mathcal{N}$ . Le Théorème 3.3 assure l'existence de  $U \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  dont la trace sur  $\partial\Omega$  est  $u$ , mais  $U$  n'a a priori aucune raison de prendre ses valeurs dans  $\mathcal{N}$ . La technique de preuve elle-même se heurte à la même obstruction que pour l'approximation : l'extension par convolution n'a aucune raison de préserver le fait que  $U$  est à valeurs dans  $\mathcal{N}$ . Nous formulons donc le problème suivant.

**Problème 2.** Soit  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ . Existe-t-il  $U \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } U = u$  sur  $\partial\Omega$  ?

## 3.2 Extension locale lorsque $p \geq m$

Comme nous le verrons par la suite, lorsqu'on souhaite étendre une fonction  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$  en une fonction  $U \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , des difficultés liées à la topologie de la variété cible surgissent même dans le cas surcritique, où  $u$  est continue ou au moins VMO. Nous commençons donc par considérer le problème de l'extension locale, où on souhaite simplement étendre  $u$  à un voisinage de  $\partial\Omega$  dans  $\Omega$ .

**Proposition 3.5.** Supposons que  $p \geq m$ . Alors, pour toute  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ , il existe un voisinage  $V \subset \overline{\Omega}$  de  $\partial\Omega$  et  $U \in W^{1,p}(V; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } U = u$  sur  $\partial\Omega$ . De plus, on peut choisir  $U \in C^\infty(V \cap \Omega)$ .

*Démonstration lorsque  $p > m$ .* Le Théorème 3.3 assure l'existence de  $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } v = u$  sur  $\partial\Omega$ . L'injection de Morrey-Sobolev assure que  $v \in C^0(\overline{\Omega})$ . De plus, comme  $(1 - \frac{1}{p})p = p - 1 > m - 1$ , nous savons que  $u$  est continue sur  $\partial\Omega$ , et la trace est alors comprise au sens classique de la restriction. En particulier,  $v \in \mathcal{N}$  sur  $\partial\Omega$ .

Soit  $\mathcal{O}$  un voisinage tubulaire de  $\mathcal{N}$  de rayon  $\iota > 0$ . Il suffit alors de choisir  $V$  suffisamment réduit pour que  $v \in \mathcal{O}$  sur  $V$  et de poser  $U = \Pi \circ v$ . Nous avons  $U \in W^{1,p}(V; \mathcal{N})$ , et comme  $v \in \mathcal{N}$  sur  $\partial\Omega$ , on a  $\text{tr } U = \text{tr } v = u$ .  $\square$

Lorsque  $p = m$ , il convient d'être plus précis car l'injection de Morrey-Sobolev échoue. Nous nous reposons sur la construction explicite de la Proposition 3.5 et sur l'injection de  $W^{1,p}$  dans VMO. À nouveau, on présente la preuve pour  $\Omega = \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$ , par souci de simplicité.

*Démonstration lorsque  $p = m$ .* Considérons l'application  $U$  définie dans la démonstration du Théorème 3.3. Pour  $t$  suffisamment proche de 0, nous avons  $U(\cdot, t) = \rho_t * u$ . En raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 2.7, nous montrons que  $\text{dist}(U(x, t), \mathcal{N}) \rightarrow 0$  uniformément par rapport à  $x$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Il suffit alors de choisir  $\tau > 0$  suffisamment réduit pour que  $U(x, t) \in \mathcal{O}$  pour tous  $x \in \mathbb{R}^{m-1}$  et  $0 \leq t \leq \tau$ , où  $\mathcal{O}$  est un voisinage tubulaire de  $\mathcal{N}$ . Sur  $V = \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \tau)$ , on peut alors projeter  $U$  sur  $\mathcal{N}$  pour obtenir l'extension souhaitée.  $\square$

Nous expliquons brièvement les idées clés de la preuve pour un ouvert borné lisse  $\Omega$  général. Pour un tel ouvert, on peut trouver un nombre fini d'ouverts  $V_i$  indexés par  $I$  qui recouvrent  $\partial\Omega$  et des difféomorphismes  $\phi_i: V_i \rightarrow \mathbb{B}^{m-1} \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^m$  tels que  $\phi_i(V_i \cap \partial\Omega) = \mathbb{B}^{m-1} \times \{0\}$  et  $\phi_i(V_i \cap \Omega) = \mathbb{B}^{m-1} \times (0, 1)$ . On considère une partition de l'unité  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  subordonnée au recouvrement  $\partial\Omega \subset \bigcup_{i \in I} V_i$  et on pose

$$u_i = \psi_i u.$$

On transporte ensuite  $u_i$  sur  $\mathbb{B}^{m-1}$  via le difféomorphisme  $\phi_i$  et on l'étend par 0 à  $\mathbb{R}^{m-1}$  tout entier, ce qui fournit une application  $\tilde{u}_i \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{R}^{m-1})$ . On obtient une extension  $\tilde{U}_i \in \mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty)$  en utilisant la construction du Théorème 3.3, et on raisonne comme dans la preuve de la Proposition 2.7 pour trouver  $\tau_i > 0$  tel que

$$\int_{B_t(x)} |\tilde{U}_i(x, t) - \tilde{u}_i(y)| dy \leq C \int_{B_t(x)} \left( \int_{B_t(x)} |\tilde{u}_i(z) - \tilde{u}_i(y)| dz \right) dy < \frac{\iota}{\text{card } I}$$

pour tous  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $0 \leq t \leq \tau_i$ , où  $\iota > 0$  est le rayon d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ . On choisit  $\tau = \min_{i \in I} \tau_i$  et on retransporte les  $\tilde{U}_i$  sur  $V_i$  via  $\phi_i$ . Notons  $U_i$  les applications ainsi obtenues. On peut alors définir  $U = \sum_{i \in I} U_i$  sur un voisinage  $V$  de  $\partial\Omega$  dans  $\Omega$ . Par l'additivité de la trace nous avons  $\text{tr } U = u$ , et par notre choix de  $\tau$ , en utilisant un raisonnement analogue à celui de la Proposition 2.7, l'image de  $U$  sur  $V$

est contenue dans  $\mathcal{O}$ , ce qui permet de projeter  $U$  sur  $\mathcal{N}$  et d'obtenir ainsi l'application souhaitée.

Nous n'écrivons pas les détails de l'adaptation de la méthode de la Proposition 2.7 en présence d'une partition de l'unité, mais mentionnons tout de même que l'ordre des arguments est important. Il est crucial de commencer par écrire  $\text{dist}(U(x), \mathcal{N}) \leq |U(x) - u(y)|$  avant de décomposer la somme et d'appliquer l'argument de moyenne à chaque terme de celle-ci. En effet, si on commence par utiliser l'argument de moyenne de la Proposition 2.7 à chaque terme pour déduire que chaque  $U_i$  est uniformément proche de  $\mathcal{N}$ , rien n'assure que cette propriété ne soit pas détruite en prenant la somme.

Nous terminons par un autre résultat d'extension, qui fait intervenir des données au bord continues et qui nous sera utile par la suite.

**Proposition 3.6.** *Soit  $u \in C^0(\partial\Omega; \mathcal{N})$ . Il existe un voisinage  $V \subset \overline{\Omega}$  de  $\partial\Omega$  et une application  $U \in C^0(V; \mathcal{N}) \cap C^\infty(V \cap \Omega; \mathcal{N})$  telle que  $U = u$  sur  $\partial\Omega$ .*

Ce résultat est un produit dérivé des techniques que nous avons introduites précédemment. Il repose sur le fait que si  $u \in C^0(\mathbb{R}^m)$  est uniformément continue et bornée, alors la convolution  $\rho_t * u$  converge uniformément vers  $u$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Cette convergence uniforme joue le même rôle que l'injection de Morrey-Sobolev dans le contexte  $W^{1-\frac{1}{p}, p}$  – ou l'injection dans VMO dans le cas critique  $p = m$  – pour garantir qu'au voisinage de  $\partial\Omega$ , l'extension par convolution est uniformément proche de  $\mathcal{N}$  pour  $t$  suffisamment réduit, ce qui permet de projeter sur le point le plus proche. On peut alors suivre le même raisonnement que précédemment pour déduire la proposition, en étendant localement par convolution et en recollant les extensions à l'aide d'une partition de l'unité.

Ceci permet de clarifier le rôle joué par l'hypothèse  $u \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$  avec  $p \geq m$  dans la Proposition 3.5. Nous observons en effet que l'essentiel dans notre argument d'extension est de disposer d'une donnée au bord suffisamment régulière pour obtenir une extension par convolution jouissant de la régularité souhaitée, et qui soit uniformément proche de la variété au voisinage du bord afin de pouvoir recourir à la projection sur le point le plus proche.

### 3.3 Extension globale lorsque $p \geq m$

Dans cette section, nous revenons à notre problème de départ, consistant à étendre  $u$  à tout l'ouvert  $\Omega$ . Puisque dans la gamme  $p > m$  les applications de Sobolev  $W^{1,p}$  sont continues, il n'est pas étonnant que cette question soit liée au problème analogue de l'extension des fonctions continues. Nous introduisons les définitions suivantes.

**Définition 3.7.** On dit que  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension continue par rapport à  $\Omega$  lorsque toute application continue  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$  s'étend en une application continue  $g: \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ . On dit que  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$  lorsque toute application  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$  s'étend en une application  $U \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$  au sens de la trace.

Déterminer si la variété  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension continue par rapport à l'ouvert  $\Omega$  de façon générale s'avère être un problème de topologie particulièrement délicat. Aussi, nous proposons un exemple simple en guise d'illustration, qui fait le lien avec les notions d'homotopie que nous avons introduites dans la Section 2.4.

**Exemple 3.8.** La variété  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension continue par rapport à  $\mathbb{B}^m$  si et seulement si  $\pi_{m-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ . En effet, supposons dans un premier temps que  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension continue par rapport à  $\mathbb{B}^m$ , et soit  $f: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathcal{N}$  continue. Par hypothèse, il existe une extension  $g: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathcal{N}$  de  $f$ , et l'Exemple 2.13 permet de conclure que  $f$  est homotope à une application constante.

Réciproquement, supposons que  $\pi_{m-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , et soit  $f: \mathbb{S}^{m-1} \rightarrow \mathcal{N}$  continue. Soit  $H: \mathbb{S}^{m-1} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$  une homotopie entre une fonction constante et  $f$ . En particulier,  $H(\cdot, 0)$  est constante. Ceci permet de définir  $g: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathcal{N}$  par  $g(x) = H(\frac{x}{|x|}, |x|)$  avec  $g(0) = H(\omega, 0)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{S}^{m-1}$ , et on vérifie sans peine que ceci fournit l'extension de  $f$  souhaitée.

La proposition suivante, due à Bethuel et Demengel [7], révèle que dans la gamme  $p \geq m$ , la propriété d'extension  $W^{1,p}$  et la propriété d'extension continue sont équivalentes. Remarquons que dans le cas critique  $p = m$ , les applications de  $W^{1,p}$  ne sont plus continues, mais l'équivalence persiste dans ce cas limite.

**Proposition 3.9.** Supposons que  $p \geq m$ . Alors  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$  si et seulement si  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension continue par rapport à  $\Omega$ .

*Démonstration.* Nous démontrons que la propriété d'extension continue implique la propriété d'extension  $W^{1,p}$  en trois étapes. Soit  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ .

*Étape 1 : extension sur un voisinage de  $\partial\Omega$ .* La Proposition 3.5 assure l'existence d'un voisinage  $V$  de  $\partial\Omega$  dans  $\overline{\Omega}$  et d'une application  $v \in W^{1,p}(V; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } v = u$  sur  $\partial\Omega$  et lisse loin de  $\partial\Omega$ .

*Étape 2 : extension continue à tout  $\Omega$ .* Étant donné que  $V$  est un voisinage ouvert de  $\partial\Omega$  dans  $\overline{\Omega}$ , nous pouvons choisir  $\tau < 0$  suffisamment proche de 0 pour que  $\tau$  soit admissible pour le Lemme 1.4 et que  $\partial\Omega_\tau \subset V$ . Comme  $\overline{\Omega}$  et  $\overline{\Omega}_\tau$  sont difféomorphes,  $\mathcal{N}$  possède également la propriété d'extension continue par rapport à  $\Omega_\tau$ , et nous

pouvons donc définir  $\tilde{U}: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  continue telle que  $\tilde{U}(x) = v(x)$  si  $x \notin \Omega_\tau$  et  $\tilde{U}|_{\Omega_\tau}$  est une extension à  $\Omega_\tau$  de  $v|_{\partial\Omega_\tau}$ .

*Étape 3 : régularisation de l'extension.* La fonction  $\tilde{U}$  que nous avons construite est déjà lisse proche de  $\partial\Omega$ . Aussi nous souhaitons la régulariser sans modifier ses valeurs à proximité de  $\partial\Omega$ , pour ne pas détruire le fait qu'il s'agit d'une extension de  $u$ . Soit  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  une fonction de troncature telle que  $0 \leq \psi \leq 1$  sur  $\Omega$ ,  $\psi = 1$  sur  $\Omega_\tau$  et  $\psi = 0$  en dehors de  $\Omega_{\tau/2}$ . Soit  $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  un noyau régularisant. Pour  $t > 0$  suffisamment réduit, la convolution  $\rho_t * \tilde{U}$  est bien définie sur  $\Omega_{\tau/2}$ . De plus, comme  $\tilde{U}$  est continue, nous savons que  $\rho_t * \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  uniformément. Par conséquent, si  $t > 0$  est suffisamment réduit, la fonction  $(1 - \psi)\tilde{U} + \psi(\rho_t * \tilde{U})$  est bien définie, lisse sur  $\Omega$ , et son image est contenue dans un voisinage tubulaire de  $\mathcal{N}$ . Il suffit de définir  $U = \Pi((1 - \psi)\tilde{U} + \psi(\rho_t * \tilde{U}))$  pour conclure. Nous observons qu'à proximité de  $\partial\Omega$ , nous avons  $(1 - \psi)\tilde{U} + \psi(\rho_t * \tilde{U}) = \tilde{U} \in \mathcal{N}$ , et par conséquent  $\text{tr } U = \text{tr } \tilde{U} = \text{tr } v = u$ .

L'implication réciproque suit le même schéma de preuve. Soit  $f \in C^0(\partial\Omega; \mathcal{N})$ . Lors de l'Étape 1, nous utilisons la Proposition 3.6 au lieu de la Proposition 3.5 pour étendre localement  $f$  en une application lisse loin du bord. À l'Étape 2, nous utilisons cette fois la propriété d'extension  $W^{1,p}$  pour obtenir une extension globale sur  $\Omega$ , qui sera donc de régularité  $W^{1,p}$  loin du bord et continue au voisinage du bord. Comme précédemment, on conclut par l'Étape 3, consistant à régulariser loin du bord. Nous utilisons cette fois l'hypothèse  $p \geq m$  pour garantir que le procédé de régularisation fournit une fonction suffisamment proche de  $\mathcal{N}$  pour pouvoir recourir à la projection sur le point le plus proche.  $\square$

### 3.4 Nouvelle obstruction topologique lorsque $p < m$

Comme nous venons de le voir, dans le cas  $p \geq m$ , l'extension locale est toujours possible, tandis que l'extension globale est liée à la propriété d'extension continue de  $\mathcal{N}$  par rapport à l'ouvert  $\Omega$ . Dans le cas sous-critique  $p < m$ , une nouvelle obstruction topologique émerge, qui s'applique même à l'extension locale.

Nous allons à nouveau avoir recours à la fonction utilisée pour l'Exemple 2.15, mais nous aurons besoin d'estimations pour la semi-norme fractionnaire de cette application. Nous énonçons donc l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire suivante.

**Théorème 3.10.** *Soit  $0 < \theta < 1$ . Si  $p \neq 1$  ou  $s \neq 1$ , alors pour toute  $u \in L^\infty(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$ , nous avons  $u \in W^{\theta s, p/\theta}(\Omega)$  et*

$$\|u\|_{W^{\theta s, p/\theta}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Ce théorème apparaît, par exemple, chez Brezis et Mironescu pour  $p > 1$  [19, Corollary 2], avec une preuve utilisant des techniques d'analyse harmonique. Une preuve plus élémentaire fut ensuite proposée, toujours pour  $p > 1$ , par Maz'ya et Shaposhnikova [38], qui obtinrent également le comportement de la constante lorsque  $s \nearrow 1$ . L'article [21] de Brezis et Mironescu fournit, par ailleurs, un portrait clarifié du paysage des différentes inégalités de Gagliardo-Nirenberg et de leur domaine de validité, permettant notamment d'inclure le cas  $p = 1 \neq s$  dans l'énoncé du théorème qui précède; voir également [22, Section 15.2].

Avec cette inégalité à disposition, nous sommes en mesure de présenter le contre-exemple annoncé.

**Exemple 3.11.** Considérons à nouveau l'application  $u : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par  $u(x) = \frac{x}{|x|}$ . Nous savons déjà que  $u \in L^\infty(\mathbb{B}^2) \cap W^{1,q}(\mathbb{B}^2)$  pour tout  $1 \leq q < 2$ . On déduit de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire que  $u \in W^{\theta,q/\theta}(\mathbb{B}^2)$  pour tout  $0 < \theta < 1$  dès que  $1 < q < 2$ . En choisissant  $\theta = 1 - \frac{1}{p}$  et  $q = p - 1$  avec  $2 < p < 3$ , on obtient  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^2; \mathbb{S}^1)$ .

Nous allons montrer qu'il n'existe aucune application  $U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^2 \times (0, \tau); \mathbb{S}^1)$  telle que  $\text{tr } U = u$  sur  $\mathbb{B}^2$ , et ce pour tout  $\tau > 0$ . En effet, supposons qu'une telle application existe. Par un argument de généricité, il existe alors  $0 < r < \tau$  tel que simultanément  $U|_{S_r} \in W^{1,p}(S_r; \mathbb{S}^1)$  et  $\text{tr } U|_{S_r} = u|_{\partial B_r}$  sur  $\partial B_r$ , où  $S_r$  désigne la demi-sphère de rayon  $r$  définie par  $S_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r, x_3 > 0\}$ .

Comme  $p > 2$ , l'injection de Morrey-Sobolev entraîne que  $U|_{S_r} \in C^0(\overline{S_r})$ . Mais alors, en utilisant le fait que la trace d'une fonction continue coïncide avec la restriction au sens classique, nous obtenons que  $u|_{\partial B_r}$  est la restriction à  $\partial S_r$  d'une application continue définie sur tout  $\overline{S_r}$ . Ceci entraîne que  $u|_{\partial B_r}$  est homotope à une application constante, une contradiction avec le fait que l'identité sur  $\mathbb{S}^1$  n'est pas homotope à une constante, ce qui permet de conclure.

À nouveau, cette obstruction n'a rien d'un cas particulier, et est liée au fait que  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$  est non trivial. Une généralisation (non triviale) de l'Exemple 3.11 en utilisant une fonction  $f : \mathbb{S}^{[p-1]} \rightarrow \mathcal{N}$  non homotope à une constante permet d'obtenir l'obstruction générale suivante.

**Théorème 3.12.** *Si  $2 \leq p < m$  et si  $\pi_{[p-1]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , alors  $\mathcal{N}$  ne possède pas la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$ .*

Dans la gamme  $1 \leq p < 2$ , nous avons  $\pi_{[p-1]}(\mathcal{N}) = \pi_0(\mathcal{N}) = 0$  car nous supposons toujours que  $\mathcal{N}$  est connexe dans ce travail. Nous verrons dans le Chapitre 6 que  $\mathcal{N}$  possède toujours la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$  dans cette gamme de valeurs, voir le Théorème 6.2. Le Théorème 3.12 fut observé pour la première fois par Hardt et Lin [34, §6.3] pour des applications à valeurs dans le cercle, puis énoncé

en toute généralité par Bethuel et Demengel [7, Theorem 4]; voir également [45, Theorem 1.3]. Il fournit une condition nécessaire pour que  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$  formulée en termes de la topologie de la variété cible.

# Chapitre 4

## Introduction au problème du relèvement

### 4.1 Énoncé et motivation du problème

Le point de départ de cette section est l'observation suivante. Étant donnée une application  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$ , où  $\mathbb{S}^1$  est vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1, il existe une application  $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $u = e^{i\tilde{u}}$  sur  $\Omega$ . Bien entendu, cette observation est plus intéressante si nous pouvons choisir  $\tilde{u}$  possédant une certaine régularité. Un résultat bien connu assure que lorsque  $u$  est continue et  $\Omega$  simplement connexe, on peut prendre  $\tilde{u}$  continue. Dans notre cadre de travail, il est donc naturel de se demander si on peut choisir  $\tilde{u}$  de régularité  $W^{s,p}$  lorsque  $u$  est de régularité  $W^{s,p}$ .

Ce problème fut notamment étudié par Bethuel et Zheng [8] puis par Bourgain, Brezis et Mironescu [9]. La motivation de Bethuel et Zheng provenait du problème de l'approximation. Comme nous l'avons vu en détail dans le Chapitre 2, le problème de l'approximation pour des fonctions de Sobolev à valeurs variétés s'avère bien plus délicat que son analogue pour des fonctions à valeurs réelles. À l'époque de la parution de leur article, la connaissance du problème de l'approximation se limitait essentiellement au cas  $sp \geq m$  que nous avons présenté, où la régularité des applications  $W^{s,p}$  est suffisante pour pouvoir utiliser la théorie réelle après projection sur le point le plus proche. Le cas  $sp < m$  restait quant à lui largement inexploré.

À présent, supposons que nous pouvons écrire  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  comme  $u = e^{i\tilde{u}}$ , avec  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R})$ . La théorie réelle permet d'approximer  $\tilde{u}$  par une suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions lisses. Pourvu qu'on puisse passer à la limite à travers l'application exponentielle, nous obtenons une approximation de  $u$  par la suite de fonctions lisses  $(e^{i\tilde{u}_n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette approche fut employée par Bethuel et Zheng pour obtenir une réponse positive au problème de l'approximation lorsque  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ ,  $s = 1$  et  $p \geq 2$  – ce qui correspond aux valeurs optimales de  $p$ , puisque le cas  $1 \leq p < 2$  se heurte à l'obstruction topologique, étant donné que  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \neq \{0\}$ .

La motivation de Bourgain, Brezis et Mironescu provenait quant à elle de l'étude de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Le problème consiste à minimiser

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_\Omega (|u|^2 - 1)^2 dx,$$

avec  $\varepsilon > 0$  et  $\Omega = Q \times (0, 1)$  pour  $Q$  un cube dans  $\mathbb{R}^m$ . La minimisation s'effectue sur toutes les fonctions  $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{C})$  telles que  $\text{tr}_{Q \times \{0\}} u = g$ , avec  $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  prescrite. Le minimum de  $E_\varepsilon(u)$  est appelé *énergie de Ginzburg-Landau*, et est noté  $E_\varepsilon$ .

Ce problème est connecté à celui de l'extension, que nous avons exposé au Chapitre 3. En effet, la minimisation de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau s'effectue en fait parmi les extensions de  $g$  à  $\Omega$  de régularité  $W^{1,2}$ . Supposons pour l'instant qu'on puisse écrire  $g = e^{i\tilde{g}}$  pour une certaine  $\tilde{g} \in W^{\frac{1}{2},2}(Q; \mathbb{R})$ . La théorie de l'extension classique s'applique alors et permet d'étendre  $\tilde{g}$  en une fonction  $\tilde{u} \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R})$ , et on pose  $u = e^{i\tilde{u}}$ . Nous avons donc  $u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  et  $\text{tr } u = g$  sur  $Q$ . Par conséquent,  $u$  est admissible dans le calcul de  $E_\varepsilon$ . Si de plus nous avons l'estimation  $\|\tilde{g}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(Q)} \leq C_1 \|g\|_{W^{1,2}(Q)}$ , alors en utilisant les estimations pour l'extension et la trace fournies par la théorie classique, on trouve  $E_\varepsilon \leq C_2 \|g\|_{W^{\frac{1}{2},2}(Q)}^2$ , ce qui fournit une borne pour  $E_\varepsilon$  en fonction de  $\|g\|_{W^{\frac{1}{2},2}(Q)}$ , indépendante de  $\varepsilon$ .

Cependant, il s'avère que dans le cas de  $W^{\frac{1}{2},2}$ , l'existence du relèvement n'est pas garantie, comme nous le verrons dans le Théorème 4.7 ci-dessous. Notre objectif en ce début de chapitre étant seulement d'expliquer la motivation de Bourgain, Brezis et Mironescu pour l'étude du problème du relèvement, nous n'entrerons pas dans les détails de leur raisonnement car cela nous emmènerait trop loin de notre sujet. Aussi nous mentionnons seulement qu'en l'absence d'un relèvement  $\tilde{g} \in W^{\frac{1}{2},2}(Q; \mathbb{R})$  pour  $g$ , on peut seulement obtenir une borne de la forme  $E_\varepsilon \leq C \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \|g\|_{W^{\frac{1}{2},2}(Q)}^2$ , qui dégénère quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; voir [9, Theorem 5]. La preuve repose sur des techniques de relèvement et d'extension, mais contrairement à notre discussion ci-haut, leur combinaison est bien plus délicate, et des estimations précises des différentes constructions impliquées dans l'argument sont nécessaires à chaque étape.

Pour le lecteur familier avec la *théorie des revêtements*, le problème d'écrire  $u = e^{i\tilde{u}}$  appelle à un problème plus général, celui du *relèvement*. Ci-après nous rappelons brièvement quelques concepts de théorie des revêtements que nous utiliserons par la suite. Notre objectif n'est nullement de fournir un exposé complet de ce vaste sujet, le lecteur intéressé pourra consulter [35] ou [36] pour une exposition bien plus détaillée de ce domaine.

Étant donnés deux espaces topologiques  $\tilde{\mathcal{N}}$  et  $\mathcal{N}$ , on dit que  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est un *revêtement* lorsque pour tout  $x \in \mathcal{N}$ , il existe un ouvert  $U \subset \mathcal{N}$  contenant  $x$  tel que

$\pi^{-1}(U)$  est une union disjointe d'ouverts de  $\tilde{\mathcal{N}}$  homéomorphes à  $U$  via  $\pi$ . Nous dirons dans ce cas que le revêtement est *trivial au-dessus de  $U$* , ou que  $U$  *trivialise  $\pi$* . Pour un tel ouvert  $U$ , si  $V \subset \pi^{-1}(U)$  est un ouvert homéomorphe à  $U$  via  $\pi$ , nous noterons par abus de notation  $\pi^{-1}$  l'inverse de la restriction à  $V$  de  $\pi$ . Il convient cependant de garder à l'esprit que  $\pi$  n'est en général pas globalement inversible, et que l'application que nous notons ainsi  $\pi^{-1}$  dépend donc du choix de  $U$  et  $V \subset \pi^{-1}(U)$  et n'est définie que sur  $U$ .

Lorsque  $\mathcal{N}$  est une variété riemannienne connexe, alors le revêtement  $\pi$  induit une structure de variété riemannienne sur  $\tilde{\mathcal{N}}$  pour laquelle  $\pi$  est une isométrie locale, c'est-à-dire un difféomorphisme local qui préserve la métrique. Inversément, toute isométrie locale entre variétés riemanniennes complètes et connexes est un revêtement. Par la suite, nous supposerons toujours que les revêtements de variétés riemanniennes sont des isométries locales. En particulier, ce sont des applications lisses.

En lien avec le problème qui nous occupe, nous rappelons le théorème du relèvement.

**Théorème 4.1.** *Soit  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  un revêtement entre variétés connexes non vides. Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  est simplement connexe. Toute application continue  $f: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  se relève en une application continue  $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $f = \pi \circ \tilde{f}$ .*

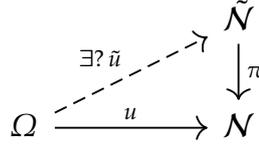
Il est commun de présenter la situation à l'aide du diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{N}} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ \Omega & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \end{array}$$

En général, la topologie de  $\tilde{\mathcal{N}}$  peut s'avérer plus simple que celle de  $\mathcal{N}$ . On pourra notamment penser au revêtement universel  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  donné par l'application exponentielle, dont nous avons parlé précédemment. Un autre exemple est donné par le revêtement du plan projectif  $\mathbb{R}P^m$  par  $\mathbb{S}^m$ , qui joue, pour  $m = 2$ , un rôle crucial dans l'étude du problème des cristaux liquides.

Motivés par ce résultat, nous formulons la question de savoir si les applications de Sobolev peuvent être relevées. Pour la suite de ce chapitre et à chaque fois qu'il sera question du problème du relèvement, nous ferons l'hypothèse additionnelle que  $\Omega$  est simplement connexe.

**Problème 3.** *Soit  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  un revêtement entre variétés connexes non vides avec  $\mathcal{N}$  compacte. Soit  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Existe-t-il une application  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  qui relève  $u$ , c'est-à-dire telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$  ?*



Avant d'aborder ce problème, une précision est nécessaire concernant la définition de  $W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . En effet, contrairement à  $\mathcal{N}$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}$  n'a aucune raison d'être compacte – on pourra penser simplement au revêtement de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$ . Le théorème de plongement de Nash s'applique néanmoins, et permet de supposer dès le départ que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est isométriquement plongée dans  $\mathbb{R}^{\tilde{v}}$ . Cependant, contrairement au cas compact, il n'est pas clair que l'espace  $W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  est indépendant du choix du plongement – sauf dans le cas  $s = 1$ , voir [14, Proposition 2.1]. Nous verrons d'ailleurs dans l'Exemple 8.4 que cela peut ne pas être le cas. En particulier, la définition de la semi-norme de Gagliardo est source de difficulté. Lorsque  $s \geq 1$ , la définition de  $W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  est identique à celle utilisée pour le cas compact, mais pour  $0 < s < 1$ , on définit

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{d_{\tilde{\mathcal{N}}}(u(x), u(y))^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy,$$

où  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}$  est la distance géodésique sur  $\tilde{\mathcal{N}}$ .

Dans le cas où  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compact, cette définition est équivalente à celle du Chapitre 1, basée sur la distance dans l'espace  $\mathbb{R}^{\tilde{v}}$  ambiant. Dans le cas non compact, cette équivalence n'est en général pas valide. Nous avons  $|x - y| \leq d_{\tilde{\mathcal{N}}}(x, y)$  lorsque  $x, y \in \tilde{\mathcal{N}}$ , et par conséquent l'espace construit avec la distance géodésique est toujours contenu dans celui reposant sur la distance induite par l'espace ambiant, mais l'autre inclusion n'est pas vérifiée en général. Dans ce travail, nous proposons l'exemple suivant pour illustrer ce fait.

**Exemple 4.2.** Nous allons construire un plongement isométrique  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que, si on note  $\tilde{\mathcal{N}} = i(\mathbb{R})$ , il existe  $u: \mathbb{B}^m \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telle que

$$\int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{d_{\tilde{\mathcal{N}}}(u(x), u(y))^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy = +\infty$$

mais

$$\int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy < +\infty.$$

Nous allons de plus faire en sorte que  $\tilde{\mathcal{N}}$  soit un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$ , en évitant par exemple de construire une spirale qui s'enroule autour d'un point.

Supposons que  $m \geq 2$ , et soient  $0 < s < 1$  et  $1 \leq p < +\infty$  tels que  $1 < sp < m$ . Étant donné  $0 < \beta < 1$  à déterminer ultérieurement, nous choisissons un plongement

isométrique  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $n^\beta \leq |i(x)| \leq (n+1)^\beta$  lorsque  $n \leq |x| \leq n+1$ . Un tel plongement peut se construire en parcourant à vitesse unité une courbe bien choisie dans  $\mathbb{R}^2$ . Le fait que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  se déduit du fait que  $|i(x)| \rightarrow +\infty$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ .

Définissons  $v: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$  par  $v(x) = |x|^{-\alpha}$  avec  $\alpha \geq \frac{m-sp}{p}$ , et posons  $u = i \circ v$ . Comme  $i$  est une isométrie, elle préserve la distance géodésique, et par conséquent

$$\int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{d_{\tilde{\mathcal{N}}}(u(x), u(y))^p}{|x-y|^{m+sp}} dx dy = \int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x-y|^{m+sp}} dx dy = +\infty$$

en vertu de l'Exemple 3.4.

Observons que  $\frac{m-sp}{sp} > \frac{m-sp}{p}$ . Par conséquent, nous pouvons choisir  $sp < q < p$  tel que  $\frac{m-q}{q} > \frac{m-sp}{p}$ , et nous pouvons donc supposer que  $\alpha < \frac{m-q}{q}$ . Comme  $i$  est une isométrie, nous avons  $|\nabla u(x)| \leq \alpha |x|^{-\alpha-1}$ , ce qui implique que  $|\nabla u| \in L^q(\mathbb{B}^m)$  car  $q(\alpha+1) < m$ . En outre, pour  $t \geq 1$  à déterminer ultérieurement, nous estimons

$$\int_{\mathbb{B}^m} |u(x)|^t dx \leq C_1 \sum_{n \in \mathbb{N}_*} n^{t\beta} (n^{-\frac{m}{\alpha}} - (n+1)^{-\frac{m}{\alpha}}),$$

puisque  $|u(x)| = |i(v(x))| \leq n^\beta$  lorsque  $n \leq |x|^{-\alpha} \leq n+1$ . L'inégalité de Bernoulli entraîne que

$$\int_{\mathbb{B}^m} |u(x)|^t dx \leq C_1 \sum_{n \in \mathbb{N}_*} n^{t\beta - \frac{m}{\alpha}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{m}{\alpha}}\right) \leq C_1 \frac{m}{\alpha} \sum_{n \in \mathbb{N}_*} n^{t\beta - \frac{m}{\alpha} - 1}.$$

Cette dernière quantité est finie dès que  $t\beta - \frac{m}{\alpha} - 1 < -1$ , et nous choisissons donc  $\beta < \frac{m}{t\alpha}$ , ce qui entraîne que  $u \in L^t(\mathbb{B}^m)$ . À présent, nous prenons  $p \leq t < +\infty$  suffisamment grand pour que  $\frac{1}{p} = \frac{s}{q} + \frac{1-s}{t}$ . Ceci est toujours possible car nous avons requis  $q > sp$ , et donc  $\frac{s}{q} < \frac{1}{p}$ . En vertu d'une inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire – voir par exemple [21, Theorem 1] – nous obtenons  $u \in W^{s,p}(\mathbb{B}^m)$  par rapport à la norme dans l'espace ambiant, ce qui achève la preuve de notre affirmation.

## 4.2 Le cas surcritique : $sp > m$

Dans le cas  $sp > m$  où les fonctions de Sobolev sont continues, le relèvement des fonctions de Sobolev se déduit du théorème du relèvement pour les applications continues.

**Proposition 4.3.** *Supposons que  $sp > m$ . Alors, pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe une fonction  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Nous souhaiterions raisonner comme suit. Étant donné que  $sp > m$ , l'injection de Morrey-Sobolev entraîne que  $u \in C^0(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$ . Puisque  $\Omega$  est supposé simplement connexe, il existe  $\tilde{u} \in C^0(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ . La compacité de  $\mathcal{N}$  et la continuité uniforme de  $u$  permettent de choisir  $\delta > 0$  tel que pour tout  $a \in \Omega$ ,  $u(B_\delta(a) \cap \Omega)$  est contenu dans un ouvert de  $\mathcal{N}$  au-dessus duquel  $\pi$  est trivial. Sur  $B_\delta(a) \cap \Omega$ , nous pouvons alors écrire  $\tilde{u} = \pi^{-1} \circ u$ .

Nous voudrions utiliser la régularité de  $\pi$ , qui est une isométrie locale de classe  $C^\infty$ , pour pouvoir conclure que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . Dans le cas où  $s = 1$ , nous avons directement  $D\tilde{u} = D\pi^{-1}(u)[Du]$  sur  $B_\delta(a) \cap \Omega$ , et comme  $\pi$  est une isométrie locale, ceci entraîne que  $|\nabla \tilde{u}| = |\nabla u|$  sur  $\Omega$  et permet de conclure que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . Le cas général nécessite davantage de travail, et nous nous reposons sur le résultat suivant concernant l'opérateur de composition pour les applications de Sobolev. Le lecteur pourra par exemple consulter [22, Chapter 15.3] et les références qui s'y trouvent.

**Théorème 4.4.** *Soit  $k \in \mathbb{N}$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $s$ . Soit  $f: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^{v'}$  une application lisse telle que  $f, Df, \dots, D^k f \in L^\infty(\mathbb{R}^v)$ .*

- (a) *Si  $0 < s \leq 1$ , alors pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ , on a  $f \circ u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ . De plus, l'application  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \rightarrow W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ ,  $u \mapsto f(u)$  est continue.*
- (b) *Si  $s > 1$ , alors pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ , on a  $f \circ u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ . De plus, l'application  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R}^v) \rightarrow W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ ,  $u \mapsto f(u)$  est continue.*
- (c) *Si  $s > 1$ , alors pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^v)$ , on a  $f \circ u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ . De plus, l'application  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^v) \rightarrow W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$ ,  $u \mapsto f(u)$  est continue.*

Dans le point (b), la continuité est entendue au sens où  $f \circ u_n \rightarrow f \circ u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^{v'})$  pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . De même pour le point (c), en remplaçant  $W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  par  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . Le résultat reste valable lorsque  $\Omega$  n'est pas supposé borné, mais il convient d'ajouter l'hypothèse que  $f(0), \dots, D^{k-1}f(0) = 0$ .

En utilisant le raisonnement que nous venons d'expliquer, le fait que  $f \circ u \in W^{s,p}$  est clair pour  $s = 1$ . Plus généralement, dans le cas où  $s$  est entier, cela suit de la formule de Faà di Bruno en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg classique, initialement obtenue indépendamment par Gagliardo [31] et Nirenberg [49]. D'autre part, lorsque  $0 < s < 1$ , il suffit d'écrire  $|f \circ u - f \circ v| \leq \|Df\|_{L^\infty} |u - v|$  et d'injecter cela dans l'expression de la semi-norme de Gagliardo pour parvenir à la même conclusion. Le cas fractionnaire  $s > 1$  est beaucoup plus délicat, et fut établi pour la première fois par Brezis et Mironescu [19] sous l'hypothèse que  $p > 1$ . Une preuve plus élémentaire

fut ensuite proposée par Maz'ya et Shaposhnikova [37]; voir également [11, Propositions 2.5 and 2.6]. Le point (c) est une conséquence du point (b) en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire assurant que  $W^{s,p} \cap L^\infty \subset W^{1,sp}$  pour  $s > 1$ .

Une autre difficulté provient de l'absence d'additivité de la semi-norme de Gagliardo. En effet, nous ne pouvons appliquer le Théorème 4.4 que localement, sur les boules  $B_\delta(a)$ . Il est donc nécessaire de recoller ensuite la régularité locale obtenue sur chaque boule pour obtenir la régularité globale souhaitée. Par additivité de l'intégrale, si  $v \in W^{k,p}(\Omega_1)$  et  $v \in W^{k,p}(\Omega_2)$  avec  $k \in \mathbb{N}_*$ , nous trouvons directement  $v \in W^{k,p}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$  avec  $\|v\|_{W^{k,p}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}^p \leq \|v\|_{W^{k,p}(\Omega_1)}^p + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega_2)}^p$ . Ce raisonnement échoue dans le cas  $s \notin \mathbb{N}$ , car la semi-norme de Gagliardo sur  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  comporte un terme d'interaction entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Nous nous reposons sur le lemme suivant, qui permet d'obtenir de la régularité fractionnaire globale sur  $\Omega$  à partir de régularité locale sur une famille d'ouverts recouvrant  $\overline{\Omega}$ .

**Lemme 4.5.** *Supposons que  $\Omega$  est borné. Soient  $\{\omega_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\overline{\Omega}$  par des ouverts,  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable et  $0 < s < 1$ . Si  $|u|_{W^{s,p}(\Omega \cap \omega_i)} < +\infty$  pour tout  $i \in I$ , alors  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} < +\infty$ .*

*Démonstration.* Comme  $\Omega$  est borné,  $\overline{\Omega}$  est compact. Quitte à défausser des indices  $i \in I$ , nous pouvons donc supposer que  $I$  est fini. Le lemme de Lebesgue assure l'existence de  $\delta > 0$  tel que  $\Omega \subset \bigcup_{i \in I} \omega_{i,\delta}$ , où  $\omega_{i,\delta} = \{x \in \omega_i : \text{dist}(x, \partial\omega_i) > \delta\}$ . Nous estimons à présent

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)}^p \leq \sum_{i \in I} \int_{\omega_{i,\delta} \cap \Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy.$$

Pour chaque  $i \in I$ , nous décomposons

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{i,\delta} \cap \Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy &= \int_{\omega_{i,\delta} \cap \Omega} \int_{\Omega \cap \omega_i} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy \\ &\quad + \int_{\omega_{i,\delta} \cap \Omega} \int_{\Omega \setminus \omega_i} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy. \end{aligned}$$

La première intégrale est finie par hypothèse. Pour la seconde, si  $x \in \omega_{i,\delta}$  et  $y \in \Omega \setminus \omega_i$ , alors  $|x - y| \geq \delta$ , ce qui entraîne que

$$\int_{\omega_{i,\delta} \cap \Omega} \int_{\Omega \setminus \omega_i} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dx dy \leq C \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)}^p}{\delta^{m+sp}} < +\infty.$$

Notons que nous utilisons ici le fait que  $W^{s,p} \subset L^p$ , combiné avec le fait que les  $\omega_i$  recouvrent  $\Omega$ , pour déduire que  $\|u\|_{L^p(\Omega)} < +\infty$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

La preuve de la Proposition 4.3 n'est désormais plus qu'une question de combiner les résultats qui précèdent.

*Démonstration de la Proposition 4.3.* Comme  $\mathcal{N}$  est compacte et  $\pi$  est une isométrie lisse, nous obtenons que  $\pi^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  et est bornée ainsi que toutes ses dérivées. De plus, nous avons  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , mais également  $u \in L^\infty(\Omega; \mathcal{N})$  car  $u$  est à valeurs dans une variété compacte. Nous pouvons donc invoquer le Théorème 4.4 pour déduire que  $\tilde{u}$  est de régularité  $W^{s,p}$  sur  $B_\delta(a) \cap \Omega$  pour tout  $a \in \Omega$ . Dans le cas où  $s$  est entier, cela suffit à déduire que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Dans le cas fractionnaire, nous employons le Lemme 4.5 en utilisant le fait que  $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{a \in \Omega} B_\delta(a)$  pour déduire que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , et ainsi conclure la preuve.  $\square$

### 4.3 Une obstruction topologique

Comme pour l'approximation et l'extension, lorsque  $sp < m$ , des obstructions topologiques surgissent. Nous allons une fois de plus recourir à ce qui est désormais notre contre-exemple habituel.

**Exemple 4.6.** Soit  $u: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par  $u(x) = \frac{x}{|x|}$ . Nous avons montré dans l'Exemple 2.15 que  $u \in W^{1,q}(\mathbb{B}^2; \mathbb{S}^1)$  pour tout  $1 \leq q < 2$ , et on déduit de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg que  $u \in W^{s,p}(\mathbb{B}^2; \mathbb{S}^1)$  pour tous  $0 < s \leq 1$  et  $1 < p < +\infty$  tels que  $1 \leq sp < 2$ . Nous prétendons que lorsque  $1 < sp < 2$ , il n'existe aucune application  $\tilde{u}: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui relève  $u$  à travers l'application exponentielle, c'est-à-dire telle que  $u = e^{i\tilde{u}}$ .

En effet, supposons qu'une telle application existe. Par un argument de généricité, il existe  $0 < r < 1$  tel que  $\tilde{u}|_{\partial B_r} \in W^{s,p}(\partial B_r)$  et  $u|_{\partial B_r} = e^{i\tilde{u}|_{\partial B_r}}$  presque partout sur  $\partial B_r$ . Comme  $sp > 1$ , l'injection de Morrey-Sobolev entraîne que  $\tilde{u}|_{\partial B_r}$  coïncide presque partout avec une application continue. Ceci est une contradiction au fait que l'identité sur  $\mathbb{S}^1$  ne se relève pas continûment à travers l'application exponentielle, et montre qu'une telle fonction  $\tilde{u}|_{\partial B_r}$  ne peut exister.

Une fois de plus, cette obstruction peut être généralisée, en remplaçant l'identité sur  $\mathbb{S}^1$  par une application continue  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$  qui ne se relève pas continûment à travers  $\pi$ . À cette fin, nous devons supposer que le revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est *non trivial*.

Le revêtement trivial de  $\mathcal{N}$  est le revêtement de  $\mathcal{N}$  par elle-même *via* l'application identité, à homéomorphisme près. Dès que  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est non trivial, il existe une application continue  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$  qui ne se relève pas continûment à travers  $\pi$ . En guise d'illustration, le lecteur pourra garder à l'esprit l'identité sur  $\mathbb{S}^1$ , que nous avons

utilisée dans l'Exemple 4.6, et qui ne se relève pas continûment à travers le revêtement de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$  via l'application exponentielle.

L'existence d'une application continue  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$  ne pouvant être relevée continûment repose sur le fait que  $\mathbb{S}^1$  n'est pas simplement connexe, et ne peut donc être généralisée à  $\mathbb{S}^\ell$  pour  $\ell \geq 2$ . Par conséquent, l'obstruction topologique que nous allons énoncer ne surgit que lorsque  $1 \leq p < 2$ , par contraste avec les problèmes de l'approximation et de l'extension, où une obstruction topologique peut surgir pour tout  $1 \leq p < +\infty$  selon la topologie de  $\mathcal{N}$ .

**Théorème 4.7.** *Supposons que le revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est non trivial. Si  $1 \leq sp < 2 \leq m$ , alors il existe  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  qui ne se relève pas en une application  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ .*

Ce théorème est dû à Bourgain, Brezis et Mironescu [9] dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ , et à Bethuel et Chiron [6] dans le cas général.



# Chapitre 5

## Approximation lorsque $s = 1$

### 5.1 Une réponse complète au problème d'approximation lorsque $s = 1$

Dans le Chapitre 2, nous avons présenté des résultats positifs au Problème 1 dans le cas surcritique  $sp \geq m$ , où les fonctions de Sobolev sont suffisamment régulières pour pouvoir se ramener à la théorie classique des fonctions de Sobolev à valeurs réelles à l'aide de la projection sur le point le plus proche. Dans le cas sous-critique, le problème s'avère beaucoup plus délicat, et est resté sans réponse pendant plusieurs années. En 1988, quelques résultats partiels furent obtenus par Bethuel et Zheng [8] dans le cas où  $\mathcal{N}$  est une sphère. Puis, en 1991, dans son article [2] désormais considéré comme un des articles fondamentaux du domaine, Bethuel obtint le résultat suivant. Dans le reste de ce chapitre, nous noterons  $Q(r) = (-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})^m$  le cube de côté  $r$  centré en l'origine dans  $\mathbb{R}^m$ , et  $Q = Q(1)$ .

**Théorème 5.1.** *Soit  $1 \leq p < m$ . L'espace  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{1,p}(\overline{Q}; \mathcal{N})$  si et seulement si  $\pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .*

Combiné aux Propositions 2.6 et 2.7, le Théorème 5.1 résout complètement le problème de l'approximation dans le cas où  $s = 1$  lorsque  $\Omega = Q$ . Nous avons déjà observé dans la Section 2.4 que la condition  $\pi_{[p]}(\mathcal{N})$  est nécessaire pour la densité des fonctions lisses dans  $W^{1,p}(\overline{Q}; \mathcal{N})$ , et le Théorème 5.1 assure qu'elle est également suffisante. Il est remarquable que la densité des fonctions lisses dans  $W^{1,p}$  en présence d'une contrainte variété soit entièrement caractérisée par une propriété topologique de la variété cible aussi simple à énoncer.

Observons que le résultat reste valide si on remplace  $Q$  par un domaine de  $\mathbb{R}^m$  équivalent à  $Q$  via un homéomorphisme bilipschitzien, comme une boule. Pour un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  à la géométrie plus compliquée, la question est plus délicate. Dans son article [2], Bethuel commence par démontrer le Théorème 5.1 pour un cube, et affirme ensuite que le résultat se généralise pour un domaine pouvant être une variété compacte  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$  arbitraire. Hang et Lin [33] observèrent par la suite que

cette dernière affirmation est incorrecte, et que la topologie du domaine doit également être prise en compte. Ils proposèrent notamment un contre-exemple impliquant des fonctions de Sobolev entre deux plans projectifs.

Nous mentionnons ces résultats par souci d'exhaustivité et pour la curiosité du lecteur intéressé, mais dans ce mémoire, nous nous en tiendrons au cas où le domaine est un cube. Dans la suite de ce chapitre, nous allons prouver le Théorème 5.1 lorsque  $m - 1 < p < m$ , qui contient déjà l'essentiel des idées de la preuve du cas général. La démonstration étant assez longue et reposant sur plusieurs idées importantes, elle sera répartie sur plusieurs sections, chacune se concentrant sur une idée clé. Dans la Section 5.2, nous découperons  $Q$  en sous-cubes de façon bien choisie. Certains de ces cubes seront qualifiés de *bons cubes*, les autres seront les *mauvais cubes*, suivant la terminologie introduite par Bethuel. Dans la Section 5.3, nous démontrerons une version plus faible du Théorème 5.1, mais qui s'avérera suffisante pour approximer sur les mauvais cubes, au prix de la création de singularités. Ce sera l'occasion d'évoquer au passage la notion de *convergence faible* pour les applications de Sobolev à valeurs variétés. La Section 5.4 sera dédiée à l'approximation sur les bons cubes, qui repose sur une projection sur des boules suffisamment réduites, sur lesquelles il est possible de régulariser par convolution et de reprojeter sur la variété comme dans le cas surcritique. Enfin, la démonstration s'achèvera dans la Section 5.5, où nous montrerons comment effacer les singularités créées par l'approximation sur les mauvais cubes. Le chapitre se conclura par la Section 5.6, où nous expliquerons brièvement comment généraliser les idées qui précèdent au cas  $p \leq m - 1$ . Cela nous mènera naturellement à la définition d'un candidat adéquat pour remplacer la classe  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  en l'absence de la condition topologique  $\pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .

Dans le reste de ce chapitre, nous considérerons  $u \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour démontrer le Théorème 5.1, nous chercherons donc à trouver une fonction  $v \in C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  telle que

$$\int_Q |u - v|^p + |\nabla(u - v)|^p dx \leq \varepsilon.$$

## 5.2 Découpage de $Q$ : bons et mauvais cubes

Commençons par observer que nous pouvons toujours supposer que  $u \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ . En effet, par un argument de généricité, il existe une suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de réels strictement compris entre 0 et 1 telle que  $\lambda_j \rightarrow 1$  et  $u \in W^{1,p}(\partial Q(\lambda_j); \mathcal{N})$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . La suite  $(u_{\lambda_j})_{j \in \mathbb{N}}$  dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  définie par  $u_{\lambda_j}(x) = u(\lambda_j x)$  vérifie alors  $u_{\lambda_j} \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et  $u_{\lambda_j} \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$ . Il suffit donc d'approximer chaque  $u_{\lambda_j}$  par des fonctions lisses pour conclure, aussi nous pouvons supposer dès le départ que  $u \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ .

Donnons une précision concernant la définition de  $W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ . Cet espace est constitué des fonctions  $u: \partial Q \rightarrow \mathcal{N}$  de régularité  $W^{1,p}$  sur chaque face de  $Q$ , et telles que les traces des restrictions de  $u$  à deux faces adjacentes de  $Q$  coïncident sur l'arête commune à ces deux faces. Autrement dit, outre la régularité  $W^{1,p}$  sur chaque face de  $Q$ , nous demandons une condition de compatibilité sur le bord des faces.

Nous introduisons la notation suivante. Étant donnée une famille  $\mathcal{K}$  de cubes dans  $\mathbb{R}^m$ , pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}$  et pour tout  $\ell \in \{0, \dots, m\}$ , nous notons  $\sigma^\ell$  le squelette de dimension  $\ell$  de  $\sigma$ , autrement dit l'union de ses faces  $\ell$ -dimensionnelles. Nous notons  $K^\ell = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma^\ell$  le  $\ell$ -squelette de  $\mathcal{K}$ . Mentionnons que nous appelons *cube* tout produit de  $m$  intervalles, et pas seulement un produit de  $m$  intervalles de même longueur.

Le lemme suivant est le résultat principal de cette section.

**Lemme 5.2.** *Pour tout  $\eta > 0$  suffisamment réduit, il existe des constantes  $C$  et  $C'$  indépendantes de  $u$  et de  $\eta$  et une décomposition de  $Q$  en une famille  $\mathcal{K}_\eta$  de cubes telles que*

- (a) *pour tout  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$ ,  $\sigma$  est équivalent à  $Q(\eta)$  via un difféomorphisme linéaire  $\Phi$  tel que  $\|D\Phi\|_\infty, \|D\Phi^{-1}\|_\infty \leq C$ ;*
- (b)  *$u \in W^{1,p}(K_\eta^{m-1}; \mathcal{N})$  avec*

$$\int_{K_\eta^{m-1}} |\nabla u|^p dx \leq C' \eta^{-1} \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Avant de démontrer ce lemme, arrêtons-nous un instant pour en expliquer l'intérêt. Nous commençons par définir les *bons* et *mauvais cubes*.

**Définition 5.3.** *Un cube  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$  est un bon cube lorsque*

$$\frac{1}{\eta^{m-p}} \int_\sigma |\nabla u|^p dx \leq \kappa^p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\eta^{m-1-p}} \int_{\partial\sigma} |\nabla u|^p dx \leq \kappa^p,$$

*où  $\kappa > 0$  sera choisi ultérieurement. Dans le cas contraire, nous disons que  $\sigma$  est un mauvais cube. Nous notons  $\mathcal{G}_\eta$  l'ensemble des bons cubes et  $\mathcal{B}_\eta$  l'ensemble des mauvais cubes.*

Mentionnons que dans son article [2], Bethuel ajoute un facteur  $\eta^c$  dans le membre de droite de la première inégalité définissant les bons cubes, avec  $0 < c < p$ . Ce facteur supplémentaire est utilisé pour garantir la convergence des approximations sur les bons cubes. Dans ce mémoire, nous proposons une modification de l'argument sur les bons cubes permettant de se passer de ce facteur.

Comme  $p > m - 1$ , on déduit de l'injection de Morrey-Sobolev que – quitte à modifier  $u$  sur un ensemble de mesure  $(m - 1)$ -dimensionnelle nulle –  $u$  est continue sur  $K_\eta^{m-1}$ . De plus, si  $\sigma$  est un bon cube, alors l'inégalité de Morrey – voir par exemple [17],

Theorem 9.12] ou [57, Lemma 6.4.3] – assure que  $u \in C^{0,\alpha}(\partial\sigma; \mathcal{N})$  avec  $\alpha = 1 - \frac{m-1}{p}$ , et

$$|u(x) - u(y)| \leq C_M |x - y|^\alpha \eta^{\frac{m-1-p}{p}} \kappa \leq \tilde{C} \kappa \quad (5.1)$$

pour tous  $x, y \in \partial\sigma$ , où  $C_M > 0$  est la constante provenant de l'inégalité de Morrey. Cette constante dépend du domaine sur lequel l'inégalité de Morrey est appliquée, mais en vertu de l'équivalence entre  $\sigma$  et  $Q(\eta)$  et par un argument de changement d'échelle, on montre que  $C_M$  peut être choisie indépendamment du cube  $\sigma$  et de  $\eta$ .

Autrement dit, le Lemme 5.2 nous permet de décomposer  $Q$  en cubes sur le bord desquels  $u$  est continue, et de plus, l'oscillation de  $u$  est contrôlée sur le bord des bons cubes.

*Démonstration du Lemme 5.2.* Étant donné  $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ , on note  $P(k, a) = \{x \in Q : x_k = a\}$ , qui est une portion d'hyperplan contenue dans  $Q$ . Par un argument de généricité, nous avons  $u \in W^{1,p}(P(k, a); \mathcal{N})$  pour presque tout  $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Pour  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\eta < a < -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta$ , nous notons  $P(k, a, \eta) = \bigcup_{0 \leq j \leq \eta^{-1}-1} P(k, a + j\eta)$ .

Le théorème de Tonelli entraîne que

$$\int_{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\eta}^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta} \left( \int_{P(k, a, \eta)} |\nabla u|^p dx \right) da \leq \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Par conséquent, nous pouvons trouver un  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\eta < a_k < -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta$  tel que  $u \in W^{1,p}(P(k, a_k, \eta); \mathcal{N})$  avec

$$\int_{P(k, a_k, \eta)} |\nabla u|^p dx \leq 2\eta^{-1} \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Nous employons les  $P(k, a_k, \eta)$  pour obtenir un découpage de  $Q$  en une famille de cubes  $\mathcal{K}_\eta$ . Comme nous avons supposé que  $u \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ , nous déduisons que  $u \in W^{1,p}(K_\eta^{m-1}; \mathcal{N})$  avec

$$\int_{K_\eta^{m-1}} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\partial Q} |\nabla u|^p dx + \sum_{k=1}^m \int_{P(k, a_k, \eta)} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\partial Q} |\nabla u|^p dx + 2\eta^{-1} m \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Si  $\eta$  est assez réduit, nous trouvons finalement

$$\int_{K_\eta^{m-1}} |\nabla u|^p dx \leq C' \eta^{-1} \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Par construction, tous les cubes  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$  qui ne sont pas en contact avec le bord de  $Q$  sont équivalents à  $Q(\eta)$  via une translation. Pour les cubes en contact avec le bord, un

difféomorphisme linéaire peut-être nécessaire pour obtenir cette équivalence, mais l'hypothèse  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\eta < a_k < -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta$  fournit la contrainte souhaitée sur la norme de la dérivée de ce difféomorphisme et de son inverse, et la preuve est complète.  $\square$

Notons que dans la preuve qui précède, un argument de généricité pour les traces est utilisé de façon implicite, afin de s'assurer que la trace coïncide avec la restriction classique sur chacun des  $P(k, a_k, \eta)$ , mais également sur leurs intersections – qui sont des ensembles  $(m-2)$ -dimensionnels. Ceci assure que les  $u|_{P(k, a_k, \eta)}$  se « recollent bien », pour avoir réellement  $u \in W^{1,p}(K_\eta^{m-1}; \mathcal{N})$  et pas seulement  $u \in W^{1,p}(P(k, a_k, \eta); \mathcal{N})$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Nous concluons cette section en montrant qu'il n'y a pas trop de mauvais cubes.

**Lemme 5.4.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$|B_\eta^m| \leq C\eta^p \kappa^{-p} \int_Q |\nabla u|^p dx,$$

où  $|B_\eta^m|$  est le volume de l'union des mauvais cubes.

*Démonstration.* Notons  $\text{card } \mathcal{B}_\eta^m$  le nombre de mauvais cubes. Par définition des mauvais cubes, nous avons

$$\begin{aligned} \kappa^p \text{card } \mathcal{B}_\eta^m &\leq \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_\eta^m} \frac{1}{\eta^{m-p}} \int_\sigma |\nabla u|^p dx + \frac{1}{\eta^{m-1-p}} \int_{\partial\sigma} |\nabla u|^p dx \\ &\leq \frac{1}{\eta^{m-p}} \int_Q |\nabla u|^p dx + 2 \frac{1}{\eta^{m-1-p}} \int_{K_\eta^{m-1}} |\nabla u|^p dx. \end{aligned}$$

Le point (b) du Lemme 5.2 entraîne que

$$\kappa^p \text{card } \mathcal{B}_\eta^m \leq C_1 \frac{1}{\eta^{m-p}} \int_Q |\nabla u|^p dx.$$

Comme  $|B_\eta^m| \leq C_2 \eta^m \text{card } \mathcal{B}_\eta^m$ , la conclusion suit.  $\square$

Nous observons donc que pour  $\kappa > 0$  fixé,  $|B_\eta^m| \rightarrow 0$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

### 5.3 Un résultat de convergence faible : la technique de l'extension homogène

Le résultat principal de cette section est la proposition suivante.

**Proposition 5.5.** Si  $m - 1 < p < m$  et  $w \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$ , alors pour tout  $\eta > 0$  suffisamment réduit, il existe une fonction  $w_\eta \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  telle que

1. les  $w_\eta$  sont continues sur  $\overline{Q}$  sauf en un nombre fini de points;
2.  $\|\nabla w_\eta\|_{W^{1,p}(Q; \mathcal{N})} \leq C \|\nabla w\|_{W^{1,p}(Q; \mathcal{N})}$ ;
3.  $w_\eta \rightarrow w$  presque partout sur  $Q$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ;

où  $C > 0$  ne dépend ni de  $w$  ni de  $\eta$ . Si de plus  $w \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ , alors nous pouvons choisir les  $w_\eta$  pour que  $w_\eta = w$  sur  $\partial Q$ .

Ce résultat constitue une version faible du Théorème 5.1 dans le cas  $m - 1 < p < m$ . Tout d'abord, la suite d'approximations est uniquement continue sauf en un nombre fini de points. Cependant, le résultat est valide en l'absence de la condition topologique  $\pi_{m-1}(\mathcal{N}) = \pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , et nous verrons dans la Section 5.5 comment effacer les singularités lorsque  $\mathcal{N}$  satisfait à cette condition (et comment régulariser pour obtenir des fonctions lisses).

Mais surtout, la convergence forte du Théorème 5.1 est remplacée par la *convergence faible*, pour laquelle on demande uniquement une borne uniforme sur la norme du gradient ainsi que la convergence presque partout.

Comme le volume de l'union des mauvais cubes tend vers 0, cette convergence faible est néanmoins suffisante pour obtenir l'approximation sur les mauvais cubes. En effet, en appliquant cette construction à  $u$  sur chaque mauvais cube – après transport par le difféomorphisme  $\Phi$  adéquat et une mise à l'échelle – nous obtenons des fonctions  $v_\eta \in W^{1,p}(B_\eta^m; \mathcal{N})$  telles que  $v_\eta$  est continue sur  $B_\eta^m$  sauf en un nombre fini de points,  $v_\eta = u$  sur  $B_\eta^{m-1}$  – cette condition assurant que  $v_\eta$  se « recolle » bien le long des bords des mauvais cubes adjacents – et

$$\int_{B_\eta^m} |\nabla v_\eta|^p dx \leq C_1 \int_{B_\eta^m} |\nabla u|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \eta \rightarrow 0$$

car  $|B_\eta^m| \rightarrow 0$ . Dès lors,

$$\int_{B_\eta^m} |\nabla(u - v_\eta)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \eta \rightarrow 0.$$

Puisque  $\mathcal{N}$  est compacte,  $|B_\eta^m| \rightarrow 0$  et  $v_\eta, u$  sont à valeurs dans  $\mathcal{N}$  sur  $B_\eta^m$ , nous avons également

$$\int_{B_\eta^m} |u - v_\eta|^p dx \leq C_2 |B_\eta^m| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \eta \rightarrow 0,$$

ce qui achève l'approximation sur les mauvais cubes.

Notons que nous n'avons pas utilisé la convergence presque partout dans notre raisonnement. Néanmoins, nous l'incluons dans la conclusion de la Proposition 5.5

pour faire le lien avec la convergence faible telle qu'on la trouve dans la littérature. Dans certains articles, l'exigence de convergence presque partout est remplacée par la convergence en mesure. Comme  $Q$  est de mesure finie, on peut aisément passer d'une notion à l'autre, quitte à extraire une sous-suite pour obtenir la convergence presque partout à partir de la convergence en mesure.

Nous procédons à présent à la démonstration de la Proposition 5.5. L'outil principal est la notion d'extension homogène, que nous expliquons ci-dessous.

Étant donnée  $f \in W^{1,p}(\partial Q(r); \mathcal{N})$ , nous définissons  $v: Q(r) \rightarrow \mathcal{N}$  par  $v(x) = f\left(r \frac{x}{|x|_\infty}\right)$ , où  $|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$  pour  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Comme  $f \in C^0(\partial Q(r); \mathcal{N})$ , nous observons que  $v$  est bien définie et continue sur  $Q(r) \setminus \{0\}$ . Nous appelons  $v$  l'extension homogène de  $f$  à  $Q(r)$ .

Le lemme suivant fournit une estimation de l'énergie d'une extension homogène en termes de l'énergie de la fonction qu'elle étend.

**Lemme 5.6.** *Supposons que  $1 \leq p < m$ . L'extension homogène  $v$  de  $f$  satisfait  $v \in W^{1,p}(Q(r); \mathcal{N})$  avec*

$$\int_{Q(r)} |\nabla v|^p dx \leq \frac{1}{m-p} r \int_{\partial Q(r)} |\nabla f(x)|^p dx.$$

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{N}$  est compacte, il est clair par construction que  $v \in L^\infty$  et donc  $v \in L^p$ . Comme  $v$  est constante dans la direction radiale, sa dérivée radiale s'annule. En outre, comme  $f \in W^{1,p}(\partial Q(r); \mathcal{N})$ , nous déduisons que  $v$  admet une dérivée faible dans la direction tangentielle, et nous concluons que  $v$  admet un gradient faible vérifiant l'estimation

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{r}{|x|_\infty} \left| \nabla f\left(r \frac{x}{|x|_\infty}\right) \right|.$$

Le théorème de Tonelli entraîne alors que

$$\begin{aligned} \int_{Q(r)} |\nabla v|^p dx &\leq \int_0^r \int_{Q(\rho)} \frac{\rho^p}{|x|_\infty^p} \left| \nabla f\left(r \frac{x}{|x|_\infty}\right) \right|^p dx d\rho \\ &= r^{p-m+1} \int_0^r \rho^{m-1-p} d\rho \int_{\partial Q(r)} |\nabla f(x)|^p dx = \frac{1}{m-p} r \int_{\partial Q(r)} |\nabla f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

□

Avec cet outil en main, nous pouvons prouver la Proposition 5.5.

*Démonstration de la Proposition 5.5.* En raisonnant comme dans la Section 5.2, nous pouvons dès le départ supposer que  $w \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ . Notons cependant que la

procédure limite décrite dans la Section 5.2, consistant à remplacer  $w$  par  $w_{\lambda_j}$  définie par  $w_{\lambda_j}(x) = w(\lambda_j x)$ , ne préserve pas la conclusion  $w_\eta = w$  sur  $\partial Q$  si  $w \notin W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N})$ .

Nous souhaiterions utiliser l'extension homogène pour approcher faiblement  $w$ . Néanmoins, l'énergie de l'extension n'est contrôlée que par l'énergie de la fonction de départ au bord du cube. Pour obtenir une estimation en termes de l'énergie de  $w$  dans  $Q$ , il convient de découper  $Q$  comme dans la Section 5.2.

En appliquant le Lemme 5.2 à  $w$ , nous obtenons pour tout  $\eta > 0$  suffisamment réduit une décomposition de  $Q$  en une famille  $\mathcal{K}_\eta$  de cubes satisfaisant les conditions (a) et (b). Nous définissons  $w_\eta \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  comme étant l'extension homogène de  $w|_{\partial\sigma}$  à  $\sigma$  pour chaque cube  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$  – après transport par le difféomorphisme  $\Phi$  de la condition (a). De cette façon,  $w_\eta$  est continue sur  $\overline{Q}$  sauf en un nombre fini de points, localisés au centre des  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$ , et coïncide avec  $w$  sur  $K_\eta^{m-1}$ . Le Lemme 5.6 combiné avec la condition (b) assure que

$$\int_Q |\nabla w_\eta|^p dx \leq C_1 \eta^{-1} \int_{K_\eta^{m-1}} |\nabla w|^p dx \leq C_2 \int_Q |\nabla w|^p dx.$$

Il nous reste à obtenir la convergence presque partout. Comme  $w_\eta = w$  sur  $K_\eta^{m-1}$ , nous pouvons appliquer l'inégalité de Poincaré (voir par exemple [57, Theorem 6.4.7]) sur chaque cube  $\sigma \in \mathcal{K}_\eta$  pour trouver

$$\int_\sigma |w - w_\eta|^p dx \leq C_P \eta^p \int_\sigma |\nabla(w - w_\eta)|^p dx,$$

où  $C_P$  est la constante de l'inégalité de Poincaré, et où la dépendance explicite en  $\eta$  s'obtient par un argument de changement d'échelle. En sommant et en utilisant la borne sur la norme du gradient que nous avons déjà obtenue, nous déduisons

$$\int_Q |w - w_\eta|^p dx \leq C_3 \eta^p,$$

ce qui montre que  $w_\eta \rightarrow w$  dans  $L^p(Q)$ . Quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, nous pouvons donc supposer que  $w_\eta \rightarrow w$  presque partout sur  $Q$ .  $\square$

## 5.4 Approximer sur les bons cubes : projection sur une boule suffisamment réduite

Comme les bons cubes représentent la majeure partie de  $Q$ , il est nécessaire d'approximer  $u$  plus précisément sur ces cubes. En contrepartie, sur les bons cubes, nous

avons une estimation quantitative de l'énergie de  $u$ , qui entraîne l'estimation (5.1) sur l'oscillation de  $u$  :

$$|u(x) - u(y)| \leq \tilde{C}\kappa \quad \text{pour tous } x, y \in \partial\sigma \text{ lorsque } \sigma \in \mathcal{G}_\eta.$$

En nous appuyant sur cette inégalité, nous démontrons le lemme ci-dessous. Par la suite,  $\iota > 0$  désigne le rayon d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ , et nous choisissons  $0 < \delta < \iota$ . Nous supposons également que  $\kappa > 0$  est suffisamment petit pour que  $\tilde{C}\kappa \leq \frac{\delta}{2}$ .

**Lemme 5.7.** *Pour tout  $\eta > 0$  suffisamment réduit, il existe une fonction  $w_\eta \in W^{1,p}(G_\eta^m; \mathbb{R}^v)$  définie sur l'ensemble des bons cubes telle que*

- (a) *pour tout  $\sigma \in \mathcal{G}_\eta$ , il existe  $y_\sigma \in \mathcal{N}$  tel que  $w_\eta(x) \in B_\delta(y_\sigma)$  pour tout  $x \in \sigma$ ;*
- (b)  *$w_\eta = u$  sur  $\partial\sigma$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{G}_\eta$ ;*
- (c) *il existe  $A_\eta \subset G_\eta^m$  tel que  $|A_\eta| \leq C \frac{\kappa^p}{\delta^p}$  et*

$$\int_{G_\eta^m} |u - w_\eta|^p + |\nabla(u - w_\eta)|^p dx \leq C' \int_{A_\eta} |\nabla u|^p dx.$$

Avant de procéder à la démonstration de ce lemme, expliquons comment il nous permet de conclure l'approximation sur les bons cubes. Nous avons vu dans le Chapitre 2 que la technique classique pour approximer une application de Sobolev par une fonction lisse est la régularisation par convolution. Or, nous avons également vu que cette technique échoue pour des fonctions à valeurs variétés, car la convolution ne préserve en général pas la contrainte variété. Cependant, ici, nous avons  $w_\eta(x) \in B_\delta(y_\sigma)$  pour tout  $x \in \sigma$ . Comme  $B_\delta(y_\sigma)$  est convexe, si nous convolons  $w_\eta$  par un noyau régularisant sur  $\sigma$ , alors l'application résultante sera encore à valeurs dans  $B_\delta(y_\sigma) \subset \mathcal{O}$ , nous permettant d'employer la projection sur le point le plus proche pour la ramener sur  $\mathcal{N}$ . Comme nous souhaitons préserver les valeurs au bord, un argument supplémentaire est requis.

Après composition avec le difféomorphisme  $\Phi$  adéquat, nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $\sigma = Q(\eta)$ . Étant donné  $0 < \lambda < 1$ , définissons  $\tilde{w}_{\lambda,\eta}$  sur  $\sigma$  par

$$\tilde{w}_{\lambda,\eta}(x) = \begin{cases} w_\eta\left(\frac{x}{|x|_\infty}\right) & \text{si } x \in Q(\eta) \setminus Q(\lambda\eta), \\ w_\eta(\lambda^{-1}x) & \text{si } x \in Q(\lambda\eta). \end{cases}$$

Comme  $w_\eta = u$  sur  $\partial\sigma$  et  $u$  est continue sur  $\partial\sigma$ , nous avons que  $\tilde{w}_{\lambda,\eta}$  est continue sur  $Q(\eta) \setminus Q(\lambda\eta)$ . De plus,  $\tilde{w}_{\lambda,\eta} \rightarrow w_\eta$  dans  $W^{1,p}(\sigma)$  lorsque  $\lambda \rightarrow 1$ . Nous procédons alors par régularisation loin du bord, comme dans la démonstration de la Proposition 3.9. Nous choisissons un noyau régularisant  $\rho: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et une fonction de troncature  $\psi \in C_c^\infty(\sigma)$  telle que  $\psi = 1$  sur  $Q(\lambda\eta)$  et  $0 \leq \psi \leq 1$  sur  $\sigma$ . Pour  $t > 0$  suffisamment réduit,

$v_{\lambda,\eta,t} = \Pi \circ ((1 - \psi)\tilde{w}_{\lambda,\eta} + \psi(\rho_t * \tilde{w}_{\lambda,\eta}))$  est bien définie sur  $\sigma$ , continue, et nous avons  $v_{\lambda,\eta,t} = u$  sur  $\partial\sigma$  et  $v_{\lambda,\eta,t} \rightarrow \tilde{w}_{\lambda,\eta}$  dans  $W^{1,p}(\sigma)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Puisque  $|A_\eta| \leq C \frac{\kappa^p}{\delta^p}$  indépendamment de  $\eta$ , en vertu du lemme de Lebesgue, nous pouvons choisir  $\kappa > 0$  suffisamment réduit pour que

$$C' \int_{A_\eta} |\nabla u|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout } \eta > 0 \text{ suffisamment réduit,}$$

où  $\varepsilon > 0$  est arbitraire mais fixé en début de preuve. Pour  $\eta > 0$  fixé, en choisissant  $\lambda$  suffisamment proche de 1 puis  $t$  suffisamment petit, nous obtenons une fonction  $v_\eta = v_{\lambda,\eta,t} \in W^{1,p}(G_\eta^m; \mathcal{N}) \cap C^0(G_\eta^m; \mathcal{N})$  telle que  $v_\eta = u$  sur  $G_\eta^{m-1}$  et

$$\int_{G_\eta^m} |u - v_\eta|^p + |\nabla(u - v_\eta)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui achève l'approximation sur les bons cubes.

Nous procédons à présent à la preuve du Lemme 5.7.

*Démonstration du Lemme 5.7.* Étant donné  $\sigma \in \mathcal{G}_\eta$ , l'inégalité (5.1) combinée à notre choix de  $\varepsilon$  assure l'existence de  $y_\sigma \in \mathcal{N}$  tel que  $u(x) \in B_{\delta/2}(y_\sigma)$  pour tout  $x \in \partial\sigma$ . En effet, il suffit de choisir  $y_\sigma = u(y)$  pour n'importe quel  $y \in \partial\sigma$ .

Soit  $P_\sigma: \mathbb{R}^v \rightarrow B_\delta(y_\sigma)$  la projection sur le point le plus proche de  $B_\delta(y_\sigma)$ , qui est bien définie et 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^v$  car  $B_\delta(y_\sigma)$  est un convexe. Plus explicitement, nous avons

$$P_\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in B_\delta(y_\sigma), \\ y_\sigma + \delta \frac{x - y_\sigma}{|x - y_\sigma|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer que le choix naïf  $w_\eta = P_\sigma \circ u$  sur  $\sigma$  est en fait un choix approprié pour obtenir la conclusion du lemme.

Le point (a) est clair par définition de  $P_\sigma$ . Comme  $P_\sigma$  est lipschitzienne, nous avons  $w_\eta \in W^{1,p}(\sigma; \mathbb{R}^v)$ . Puisque  $u(x) \in B_{\delta/2}(y_\sigma)$  pour tout  $x \in \partial\sigma$ , nous avons bien  $w_\eta = u$  sur  $\partial\sigma$ . Ceci assure que  $w_\eta$  se « recolle » bien sur les bords des bons cubes adjacents, et donc  $w_\eta \in W^{1,p}(G_\eta^m; \mathbb{R}^v)$ . Il ne reste qu'à traiter le point (c).

Définissons  $\mathcal{U}_{\eta,\sigma} = \{x \in \sigma : u(x) \notin B_\delta(y_\sigma)\}$ . Par construction de  $w_\eta$ , nous avons  $w_\eta = u$  et  $\nabla w_\eta = \nabla u$  presque partout sur  $\sigma \setminus \mathcal{U}_{\eta,\sigma}$ . Comme  $w_\eta = u$  sur  $\partial\sigma$ , l'inégalité de Poincaré assure que

$$\int_\sigma |u - w_\eta|^p dx \leq C_P \eta^p \int_\sigma |\nabla(u - w_\eta)|^p dx \leq C_1 \eta^p \int_{\mathcal{U}_{\eta,\sigma}} |\nabla u|^p dx,$$

où nous avons utilisé le fait que  $P_\sigma$  est lipschitzienne pour estimer la norme de  $\nabla w_\eta$  en fonction de celle de  $\nabla u$ . En outre, nous avons

$$\int_\sigma |\nabla(u - w_\eta)|^p dx \leq C_2 \int_{\mathcal{U}_{\eta,\sigma}} |\nabla u|^p dx.$$

En sommant sur les bons cubes, nous trouvons

$$\int_{G_\eta^m} |u - w_\eta|^p + |\nabla(u - w_\eta)|^p dx \leq C' \int_{A_\eta} |\nabla u|^p dx,$$

où  $A_\eta = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{G}_\eta} \mathcal{U}_{\eta,\sigma}$ . Il reste donc à estimer la mesure de  $A_\eta$  pour pouvoir conclure.

Soit  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction de troncature telle que  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(x) = 0$  si  $x \leq \frac{\delta}{2}$ ,  $\varphi(x) = 1$  si  $x \geq \delta$  et  $|\varphi'| \leq \frac{C_3}{\delta}$ . Nous observons que  $\varphi(|u - y_\sigma|)^p = 1$  sur  $\mathcal{U}_{\eta,\sigma}$ , ce qui entraîne que

$$|\mathcal{U}_{\eta,\sigma}| \leq \int_\sigma \varphi(|u - y_\sigma|)^p dx.$$

Comme  $u \in B_{\delta/2}(y_\sigma)$  sur  $\partial\sigma$ , nous obtenons  $\varphi(|u - y_\sigma|) = 0$  sur  $\partial\sigma$ , ce qui justifie l'usage de l'inégalité de Poincaré pour écrire

$$|\mathcal{U}_{\eta,\sigma}| \leq C_P \eta^p \int_\sigma |\nabla(\varphi(|u - y_\sigma|))|^p dx \leq C_4 \frac{\eta^p}{\delta^p} \int_\sigma |\nabla u|^p dx.$$

Puisque  $\sigma$  est un bon cube, nous déduisons

$$|\mathcal{U}_{\eta,\sigma}| \leq C_4 \frac{\kappa^p}{\delta^p} \eta^m \leq C_5 \frac{\kappa^p}{\delta^p} |\sigma|,$$

où la dernière inégalité suit de l'équivalence entre  $\sigma$  et  $Q(\eta)$ . Il suffit alors de sommer cette inégalité sur l'ensemble des bons cubes pour conclure que

$$|A_\eta| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_\eta} C_5 \frac{\kappa^p}{\delta^p} |\sigma| \leq C_5 \frac{\kappa^p}{\delta^p},$$

ce qui achève la preuve. □

## 5.5 Conclusion de la démonstration : effacer les singularités

Nous combinons à présent les constructions effectuées sur les bons cubes et les mauvais cubes. Nous commençons par choisir  $\kappa > 0$  suffisamment réduit de telle sorte

que pour tout  $\eta > 0$  suffisamment petit, il existe  $v_\eta \in W^{1,p}(G_\eta^m; \mathcal{N}) \cap C^0(G_\eta^m; \mathcal{N})$  telle que  $v_\eta = u$  sur  $G_\eta^{m-1}$  et

$$\int_{G_\eta^m} |u - v_\eta|^p + |\nabla(u - v_\eta)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, nous prenons  $\eta > 0$  assez proche de 0 pour obtenir  $v_\eta \in W^{1,p}(B_\eta^m; \mathcal{N})$  continue sur  $B_\eta^m$  sauf en un nombre fini de points, telle que  $v_\eta = u$  sur  $B_\eta^{m-1}$  et

$$\int_{B_\eta^m} |u - v_\eta|^p + |\nabla(u - v_\eta)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ceci fournit une application  $v_\eta \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  telle que

$$\int_Q |u - v_\eta|^p + |\nabla(u - v_\eta)|^p dx \leq \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Notons que nous utilisons la condition de compatibilité  $v_\eta = u$  sur le bord des cubes de  $\mathcal{K}_\eta$  pour nous assurer que les différentes parties de  $v_\eta$  se « recollent » bien le long des faces des cubes. En outre, la fonction  $v_\eta$  est continue sur  $\overline{Q}$  sauf en un nombre fini de singularités, localisées au centre des mauvais cubes et causées par l'extension homogène. La dernière étape importante à accomplir est donc d'effacer ces singularités, ce que nous faisons à l'aide du lemme suivant. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il s'agit du *seul* point de la preuve du Théorème 5.1 où nous utilisons la condition topologique sur  $\mathcal{N}$ .

**Lemme 5.8.** *Supposons que  $1 \leq p < m$  et que  $\pi_{m-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ . Soit  $f \in W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\partial Q; \mathcal{N})$  et soit  $v$  son extension homogène à  $Q$ . Pour tout  $0 < r < 1$ , il existe une fonction  $\tilde{v}_r \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\overline{Q}; \mathcal{N})$  avec  $\tilde{v}_r \rightarrow v$  dans  $W^{1,p}(Q)$  lorsque  $r \rightarrow 0$ .*

Dans la gamme  $m - 1 < p < m$ , l'hypothèse de continuité est automatiquement satisfaite grâce à l'injection de Morrey-Sobolev. Forts des techniques d'extension que nous avons présentées dans le Chapitre 3, nous pouvons donner une preuve de ce lemme plus brève que celle fournie par Bethuel. L'idée clé est d'effacer la singularité en la bouchant à l'aide d'une extension de  $v|_{\partial Q(r)}$  à  $Q(r)$  pour  $0 < r < 1$  suffisamment réduit. *A priori*, il n'y a aucune raison de pouvoir contrôler l'énergie de cette extension. Néanmoins, comme  $v$  est homogène, la même extension peut-être utilisée pour toute valeur de  $0 < r < 1$  après une mise à l'échelle, ce qui nous fournit le contrôle souhaité pour l'énergie.

*Démonstration.* Étant donné que  $\pi_{m-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , nous savons que  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension par rapport à  $Q$ . Nous commençons par construire une application  $V \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\overline{Q}; \mathcal{N})$  telle que  $V = f$  sur  $\partial Q$ . Pour ce faire, nous raisonnons en trois étapes comme dans preuve de la Proposition 3.9. Comme  $f \in$

$W^{1,p}(\partial Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\partial Q; \mathcal{N})$ , nous pouvons l'étendre au voisinage de  $\partial\Omega$  en une application  $W^{1,p}$  et continue jusqu'au bord, par extension homogène par exemple. Nous utilisons ensuite la propriété d'extension continue de  $\mathcal{N}$  par rapport à  $Q$  pour prolonger cette extension à tout  $Q$  de façon continue – mais pas nécessairement  $W^{1,p}$  loin de  $\partial\Omega$ . Enfin, nous procédons par régularisation loin de  $\partial Q$  pour obtenir l'application  $V$  souhaitée.

Pour tout  $0 < r < 1$ , nous définissons  $V_r$  sur  $Q(r)$  par  $V_r(x) = V(r^{-1}x)$ . De cette façon,  $V_r \in W^{1,p}(Q(r); \mathcal{N})$ ,  $V_r = v$  sur  $\partial Q(r)$  en vertu de l'homogénéité de  $v$ , et

$$\int_{Q(r)} |\nabla V_r|^p dx = \int_{Q(r)} r^{-p} |\nabla V(r^{-1}x)|^p dx = \int_Q r^{m-p} |\nabla V|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0.$$

Il suffit d'utiliser cette estimation ainsi que le fait que  $V \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$ , la compacité de  $\mathcal{N}$  et le théorème de convergence dominée pour conclure que, si nous définissons

$$\tilde{v}_r(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in Q \setminus Q(r), \\ V_r(x) & \text{si } x \in Q(r), \end{cases}$$

alors  $\tilde{v}_r \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\overline{Q}; \mathcal{N})$  et  $\tilde{v}_r \rightarrow v$  dans  $W^{1,p}(Q)$  lorsque  $r \rightarrow 0$ . □

En appliquant le Lemme 5.8 pour effacer la singularité de  $v_\eta$  sur chaque mauvais cube avec  $0 < r < 1$  suffisamment réduit, nous obtenons une fonction  $v \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N}) \cap C^0(\overline{Q}; \mathcal{N})$  telle que

$$\int_Q |u - v|^p + |\nabla(u - v)|^p dx \leq \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 5.1 dans le cas  $m - 1 < p < m$ , à ceci près que  $v$  est seulement continue et non lisse. Cependant, il suffit de régulariser  $v$  par convolution. Comme  $v$  est continue, les régularisées convergent dans  $W^{1,p}$  mais aussi uniformément, et nous pouvons donc projeter sur la variété comme nous l'avons fait dans le cas surcritique  $p > m$ , ce qui complète la preuve.

## 5.6 Esquisse du cas $p \leq m - 1$ . La classe $\mathcal{R}_p$

Dans cette section, nous expliquons brièvement les difficultés supplémentaires qui surgissent dans le cas  $p \leq m - 1$  et les idées clés pour les surmonter. Ceci nous mènera naturellement vers une manière de généraliser le Théorème 5.1 en l'absence de la condition topologique  $\pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .

La preuve du cas  $p \leq m - 1$  suit les mêmes idées que celle du cas  $m - 1 < p < m$ . Cependant, l'injection de Morrey-Sobolev ne permet plus de déduire que  $u$  est continue sur un  $(m - 1)$ -squelette générique. Nous devons donc descendre jusqu'à un

$[p]$ -squelette. Dans le cas où  $p \in \mathbb{N}$ , l'injection de Morrey-Sobolev échoue. Pour tout  $k \in \{1, \dots, m-1\}$ , le cas  $p = k$  se traite de façon analogue au cas  $k < p < k+1$ , mais il est nécessaire d'employer un argument plus délicat, dans l'esprit de la théorie VMO que nous avons exposée dans la Section 2.3. Nous nous focalisons donc sur le cas  $p \notin \mathbb{N}$ .

Comme dans la Section 5.2, nous découpons  $Q$  en une famille de cubes  $\mathcal{K}_\eta$ , mais cette fois choisie de sorte que  $u \in W^{1,p}(K_\eta^k)$  pour tout  $[p] \leq k \leq m$ , et nous incorporons dans la définition des bons cubes un contrôle sur l'énergie sur tous les  $k$ -squelettes pour  $[p] \leq k \leq m$ .

Le traitement des bons cubes est plus délicat, car  $u$  n'est plus continue sur les  $(m-1)$ -faces de ces cubes mais seulement sur les  $[p]$ -faces, mais l'idée clé reste de projeter sur une boule suffisamment réduite afin de pouvoir régulariser par convolution et reprojeter sur la variété, en utilisant l'inégalité de Morrey en dimension  $[p]$  pour contrôler l'erreur commise lors de cette projection.

Nous nous attardons plus longuement sur le traitement des mauvais cubes. Nous savons que  $u$  est continue sur les  $[p]$ -faces de ces cubes. Par conséquent, nous pouvons employer la technique de l'extension homogène pour étendre  $u|_{B_\eta^{[p]}}$  en une fonction continue sur  $B_\eta^{[p]+1}$  sauf au centre des faces. En répétant cette construction, nous obtenons une extension à  $B_\eta^{[p]+2}$ , continue sauf sur un ensemble fini de portions de droites. Par itération, nous parvenons à une fonction  $v_n$  qui coïncide avec  $u$  sur  $B_\eta^{[p]}$  et continue sauf sur un ensemble fini de portions de  $(m-[p]-1)$ -hyperplans.

Une difficulté supplémentaire surgit au moment de recoller les constructions effectuées sur les différents cubes. En effet, contrairement au cas  $m-1 < p < m$  où l'extension homogène depuis le  $(m-1)$ -squelette préserve les valeurs sur les faces des cubes, ici l'extension homogène depuis le  $[p]$ -squelette peut modifier considérablement les valeurs de  $u$  sur les faces des mauvais cubes si  $p < m-1$ . Par conséquent, les constructions effectuées sur un bon cube et un mauvais cube adjacents ne coïncident que sur l'intersection des  $[p]$ -squelettes de ces cubes, ce qui n'est pas suffisant pour garantir que les approximations obtenues sur chacun de ces cubes coïncident au sens de la trace sur la face commune afin de pouvoir les recoller. Le même problème surgit lorsqu'on souhaite recoller les constructions sur deux bons cubes adjacents, puisque la boule sur laquelle on projette dépend du cube, et donc les approximations obtenues ne coïncident à nouveau que sur l'intersection des  $[p]$ -squelettes des deux cubes. Pour remédier à cela, un argument bien plus délicat est nécessaire, que nous ne souhaitons pas détailler et pour lequel nous renvoyons le lecteur intéressé à [2]. Nous nous contentons de mentionner que l'idée clé consiste, sur chaque bon cube  $\sigma$ , à contracter légèrement  $u$  sur  $\sigma$  afin de pouvoir effectuer les constructions décrites précédemment sur une version légèrement contractée de  $\sigma$ . Ceci fournit une « marge de sécurité » par rapport au bord de  $\sigma$ , qui est utilisée pour obtenir des approximations

compatibles sur les faces des cubes adjacents *via* un argument dont nous omettons la description.

Comme pour le cas  $m - 1 < p < m$ , ces différentes étapes ne font pas usage de l'hypothèse topologique sur  $\mathcal{N}$ , mais à l'issue de la construction, on obtient seulement une approximation de  $u$  par des applications continues sauf sur un ensemble singulier, consistant en une union finie de portions  $(m - [p] - 1)$ -hyperplans, et dont l'existence est causée par l'extension homogène. Pour conclure, il est nécessaire d'effacer cet ensemble singulier à l'aide d'une généralisation du Lemme 5.8, qui fait quant à elle appel à l'hypothèse  $\pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .

Au vu du raisonnement concernant l'ensemble singulier, on observe que l'ensemble des fonctions lisses sauf sur une union finie de portions de  $(m - [p] - 1)$ -hyperplans constitue un remplaçant adéquat de l'ensemble  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  pour trouver une classe de fonctions « suffisamment régulières » qui soit dense dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$ . Par la suite, il nous sera utile de permettre à l'ensemble singulier de consister en une union finie de *sous-variétés*  $(m - [p] - 1)$ -dimensionnelles de  $Q$ . Nous introduisons donc la définition suivante.

**Définition 5.9.** *La classe  $\mathcal{R}_p(\Omega; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telles que  $v$  est  $C^\infty$  sur  $\overline{\Omega}$  sauf sur une union finie de sous-variétés  $(m - [p] - 1)$ -dimensionnelles de  $\Omega$ .*

Le théorème suivant est également dû à Bethuel [2, Theorem 2].

**Théorème 5.10.** *Pour tout  $1 \leq p < m$ , la classe  $\mathcal{R}_p(Q; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$ .*

Lorsque  $m - 1 < p < m$ , nous avons  $m - [p] - 1 = 0$ , et donc  $\mathcal{R}_p(Q; \mathcal{N})$  est l'ensemble des fonctions  $v \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  lisses sur  $\overline{Q}$  sauf en un nombre fini de points. Nous avons donc déjà démontré le Théorème 5.10 pour cette gamme de valeurs, il suffit de reprendre le raisonnement des Sections 5.2 à 5.4 en s'arrêtant avant d'effacer les singularités. De façon analogue, la preuve du cas général suit les étapes de la preuve du Théorème 5.1 que nous avons esquissée, en s'arrêtant dès que nous avons obtenu une approximation lisse sauf sur un nombre fini de portions de  $(m - [p] - 1)$ -hyperplans.

Toujours dans l'optique d'étudier le problème de l'approximation en l'absence de l'hypothèse  $\pi_{[p]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , remarquons également qu'un examen de la démonstration que nous avons présentée permet de déterminer la classe  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , qui fait l'objet de la Définition 2.2. Nous expliquons le raisonnement dans le cas  $m - 1 < p < m$ . Comme nous l'avons expliqué, la seule étape de la preuve nécessitant l'hypothèse topologique sur  $\mathcal{N}$  est l'effacement des singularités. On peut donc appliquer tout le reste de l'argument à une application  $u \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  même en l'absence de cette hypothèse. Ensuite, pour effacer les singularités, en examinant la démonstration du Lemme 5.8, on observe qu'il suffit que la restriction de  $u$  au bord de chaque mauvais cube admette une extension continue à l'ensemble du mauvais cube. En des termes qui nécessiteraient d'être

précisés pour obtenir un énoncé rigoureux, nous pouvons donc dire que  $H^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $u \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  telles que  $u|_{\partial\sigma}$  admet une extension continue à  $\sigma$  pour un cube  $\sigma \subset Q$  générique. Plus généralement, pour  $1 \leq p < m$ ,  $H^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $u \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  telles que la restriction de  $u$  au  $[p]$ -squelette d'un cube  $\sigma \subset Q$  générique admet une extension continue à  $\sigma$ . Pour montrer que  $H^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  contient uniquement les fonctions possédant cette propriété, on pourra utiliser une généralisation de l'argument de l'Exemple 2.15.

## 5.7 Commentaires et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté la démonstration du résultat de densité pour  $s = 1$  due à Bethuel, et plus particulièrement le cas  $m - 1 < p < m$ . Des difficultés importantes surgissent si on tente d'adapter l'argument pour  $0 < s < +\infty$  arbitraire.

Déjà pour  $s \in \mathbb{N}$ , un problème apparaît au moment de recoller les constructions effectuées sur les différents cubes. En effet, contrairement au cas  $s = 1$  où deux applications  $W^{1,p}$  sur des cubes adjacents dont la trace coïncide sur le bord commun se recollent en une application  $W^{1,p}$  sur l'union des deux cubes, lorsque  $s \geq 2$ , il ne suffit plus que deux applications aient la même trace sur le bord commun pour pouvoir les recoller.

Ensuite, pour  $s \notin \mathbb{N}$ , il n'est pas clair du tout comment adapter l'argument de Bethuel, qui est prévu pour fonctionner avec des dérivées entières. Une source majeure de complications dans cette direction provient du caractère non local de la semi-norme de Gagliardo.

En raison de ces difficultés, le problème de l'approximation pour  $s \neq 1$  dans le cas sous-critique est resté ouvert pendant de longues années, avant qu'une réponse complète ne soit obtenue pour  $0 < s < 1$  et  $s \in \mathbb{N}_*$ . Le cas  $s > 1$  avec  $s \notin \mathbb{N}$  reste quant à lui *ouvert*. Ci-dessous, nous présentons brièvement ces résultats, sans entrer dans les détails.

### 5.7.1 Approximation lorsque $0 < s < 1$ : quand l'extension homogène suffit

Dans le cas  $0 < s < 1$ , la réponse complète au problème de l'approximation fut fournie en 2015 par Brezis et Mironescu [20].

**Théorème 5.11.** *Supposons que  $0 < s < 1$  et que  $sp < m$ . L'espace  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(Q; \mathcal{N})$  si et seulement si  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .*

En outre, l'analogue du Théorème 5.10, qui fournit la densité de la classe  $\mathcal{R}_p$  dans le cas où la condition topologique sur  $\mathcal{N}$  échoue, est valide dans la gamme  $0 < s < 1$ . Nous introduisons une généralisation de la Définition 5.9 pour un paramètre de régularité  $0 < s < +\infty$  arbitraire.

**Définition 5.12.** La classe  $\mathcal{R}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  est l'ensemble des  $v \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telles que  $v$  est  $C^\infty$  sur  $\Omega$  sauf sur une union finie de sous-variétés  $(m - [sp] - 1)$ -dimensionnelles de  $\Omega$ .

**Théorème 5.13.** Supposons que  $0 < s < 1$  et que  $sp < m$ . La classe  $\mathcal{R}_{s,p}(Q; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(Q; \mathcal{N})$ .

Mentionnons tout de même qu'avant ces deux théorèmes, quelques réponses partielles étaient déjà connues. Le cas  $s = 1 - \frac{1}{p}$  avait été résolu en 1995 par Bethuel [3] à l'aide de la théorie des traces et de l'extension. Le cas de l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^1) = W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{S}^2; \mathbb{S}^1)$ , où  $sp = 1$  et donc  $\pi_{[sp]}(\mathbb{S}^1) \neq \{0\}$ , avait quant à lui été étudié par Rivière [53] en 2000. En outre, la nécessité de l'hypothèse  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) = \{0\}$  dans le Théorème 5.11 était connue en toute généralité depuis les travaux d'Escobedo [27] en 1998.

La preuve des Théorèmes 5.11 et 5.13 est loin d'être triviale, mais l'ingrédient initial s'avère très simple, et nous avons déjà tous les outils nécessaires pour le comprendre. Rappelons la Proposition 5.5, qui nous donne la convergence faible vers  $w \in W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  de fonctions  $w_\eta$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ , où chaque  $w_\eta$  est l'extension homogène de la restriction de  $w$  au  $(m - 1)$ -squelette d'une certaine grille dans  $Q$ . Lorsque  $0 < s < 1$ , un miracle se produit : on obtient de la convergence forte.

Plus précisément, on montre [20, Theorem 5] que pour  $[sp] \leq j \leq m - 1$ , en supposant que  $u \in W^{s,p}(\omega; \mathcal{N})$  pour un ouvert  $\omega \subset \mathbb{R}^m$  tel que  $\overline{Q} \subset \omega$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W^{s,p}(K_n^m; \mathcal{N})$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(Q; \mathcal{N})$ , où  $\mathcal{K}_n$  est une famille de cubes telle que  $\overline{Q} \subset K_n^m \subset \omega$  et  $u_n$  est l'extension homogène de la restriction de  $u$  à  $K_n^j$ .

La preuve de cette affirmation repose sur un argument de moyenne, que nous aurons l'occasion de développer plus en détail dans la Section 6.4. Pour une famille de cubes  $\mathcal{K}_n$  comme ci-haut fixée, il n'est pas clair qu'il est possible d'estimer  $\|u_n - u\|_{W^{s,p}}$ . Pour remédier à cela, pour chaque  $a \in \mathbb{R}^m$  et  $\eta > 0$ , on définit la décomposition  $\mathcal{K}_{a,\eta}$  de  $\mathbb{R}^m$  en cubes de côté  $2\eta$  par  $\mathcal{K}_{a,\eta} = \{a + k2\eta + [-\eta, \eta] : k \in \mathbb{Z}^m\}$ , et on construit  $u_{\mathcal{K}_{a,\eta}}$  comme l'extension homogène de la restriction de  $u$  à  $K_{a,\eta}^j$ . On peut ensuite montrer, par une combinaison d'estimations précises, que

$$\int_{Q(\eta)} \|u_{\mathcal{K}_{a,\eta}} - u\|_{W^{s,p}} da \leq a(\eta) + b(\eta),$$

où  $a(\eta) \rightarrow 0$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$  et  $\int_0^1 \frac{b(\eta)}{\eta} d\eta < +\infty$ . Cela implique que

$$\int_{Q(\eta_n)} \|u_{\mathcal{K}_{a,\eta_n}} - u\|_{W^{s,p}} da \rightarrow 0$$

pour une suite  $\eta_n \rightarrow 0$  bien choisie. On peut donc choisir une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\|u_{\mathcal{K}_{a_n,\eta_n}} - u\|_{W^{s,p}} \rightarrow 0$ , et poser  $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{a_n,\eta_n}$  et  $u_n = u_{\mathcal{K}_{a_n,\eta_n}}$  permet de conclure.

Davantage de travail est ensuite requis pour montrer que les  $u_n$  peuvent être prises lipschitziennes sur  $K_n^j$  si  $j \leq sp$ , ce qui entraîne que les  $u_n$  sont localement lipschitziennes en dehors d'un ensemble singulier qui est une union finie de  $(m - j - 1)$ -hyperplans. En combinant les contraintes  $[sp] \leq j \leq sp$ , nous sommes conduits à poser  $j = [sp]$ , et nous trouvons une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W^{s,p}$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{s,p}$  et telle que chaque  $u_n$  est continue en dehors d'une union finie de  $(m - [sp] - 1)$ -hyperplans. On peut ensuite régulariser pour remplacer la continuité par de la régularité  $C^\infty$ , ce qui conduit au Théorème 5.13.

Le Théorème 5.11 s'obtient à partir du Théorème 5.13 en utilisant le fait que les  $u_n$  sont localement lipschitziennes pour se ramener au cas  $s = 1$ , et en utilisant une inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire pour récupérer la convergence  $W^{s,p}$ .

## 5.7.2 Approximation lorsque $s \in \mathbb{N}_*$

Dans le cas  $s = k \in \mathbb{N}_*$ , la réponse complète au problème de l'approximation fut apportée en 2015 par Bousquet, Ponce et Van Schaftingen [13].

**Théorème 5.14.** *Supposons que  $k \in \mathbb{N}_*$  et que  $kp < m$ . L'espace  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{k,p}(Q; \mathcal{N})$  si et seulement si  $\pi_{[kp]}(\mathcal{N}) = \{0\}$ .*

La densité de la classe  $\mathcal{R}_{k,p}$  est également disponible.

**Théorème 5.15.** *Supposons que  $k \in \mathbb{N}_*$  et que  $kp < m$ . La classe  $\mathcal{R}_{k,p}(Q; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{k,p}(Q; \mathcal{N})$ .*

L'ingrédient initial de la démonstration reste la technique des bons et mauvais cubes. Néanmoins, comme nous l'avons déjà annoncé, des difficultés surgissent au moment de recoller les constructions effectuées sur des cubes adjacents. Pour cette raison, des outils complètement nouveaux sont nécessaires. Dans la suite, nous présentons une brève esquisse de la preuve, sans entrer dans les détails, afin de tenter d'apporter de l'intuition sur ces différents outils et la façon dont ils se combinent pour conduire au résultat.

On se donne une décomposition  $\mathcal{K}_\eta$  de  $Q$  en cubes de côté  $2\eta$ . On note  $\mathcal{B}_\eta$  l'ensemble des mauvais cubes  $\sigma$ , définis par la condition

$$\frac{C_1}{\eta^{m-kp}} \int_{\sigma^{m+Q(2\rho\eta)}} |Du|^{kp} dx > \iota,$$

où  $\iota > 0$  est le rayon d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ , et  $0 < \rho < \frac{1}{2}$  et  $C_1 > 0$  sont à déterminer.

Le premier outil est la technique de *l'ouverture*, inspirée des travaux de Brezis et Li [18]. Elle permet de remplacer  $u$  par une application  $u_\eta^{\text{op}} \in W^{k,p}(Q; \mathcal{N})$  sans trop en modifier la norme  $W^{k,p}$ , qui coïncide avec  $u$  hors d'un voisinage de l'ensemble des mauvais cubes, et telle que pour tout mauvais cube  $\sigma$  et tout  $0 \leq j \leq [kp]$ ,  $u_\eta^{\text{op}}$  est constante dans la direction orthogonale à  $\sigma^j$  au voisinage de  $\sigma^j$ . Autrement dit, au voisinage de  $\sigma^j$ ,  $u_\eta^{\text{op}}$  dépend au plus de  $[kp]$  variables, ce qui permet d'obtenir une estimation de type VMO dans cette région.

Ensuite, on utilise la technique de *régularisation adaptative*, définie comme une convolution dont le paramètre de convolution dépend du point d'évaluation. En régularisant  $u_\eta^{\text{op}}$  à l'aide de cette technique, on obtient une application  $u_{\text{sm}} \in W^{k,p}(Q; \mathbb{R}^v)$  lisse, mais non nécessairement à valeurs dans  $\mathcal{N}$ . Le paramètre de convolution est choisi d'ordre  $\eta$  sur les bons cubes. On estime alors la distance entre  $u_\eta^{\text{sm}}$  et  $\mathcal{N}$  sur les bons cubes à l'aide d'une intégrale moyenne sur un cube de côté d'ordre  $\eta$ , comme dans la Section 2.3, que l'on majore à l'aide de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et du contrôle de la norme de  $Du$  sur les bons cubes. Le choix de l'ordre  $\eta$  pour le paramètre de régularisation permet d'avoir une borne *inférieure* sur le volume des cubes sur lesquels on moyenne, ce volume apparaissant au dénominateur dans l'intégrale moyenne. Au voisinage du  $[kp]$ -squelette des mauvais cubes, on choisit le paramètre de régularisation d'ordre suffisamment réduit, et on utilise l'estimation VMO disponible sur cette région. On en conclut que, pour un choix convenable des différents paramètres,  $u_\eta^{\text{sm}}$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{O}$  sur  $Q$  sauf dans les mauvais cubes, loin du  $[kp]$ -squelette.

Enfin, on utilise une technique d'*épaississement* pour remplacer  $u_\eta^{\text{sm}}$  par une application  $u_\eta^{\text{th}}$  qui coïncide avec  $u_\eta^{\text{sm}}$  loin des mauvais cubes. Cette technique d'épaississement peut être pensée comme une version plus élaborée de l'extension homogène, qui permet de modifier  $u_\eta^{\text{sm}}$  à l'intérieur des mauvais cubes  $\sigma$  de sorte que la fonction obtenue ne dépende que des valeurs de  $u_\eta^{\text{sm}}$  au voisinage de  $\sigma^{[kp]}$ , tout en garantissant que les constructions sur chaque cube se recollent bien jusqu'à l'ordre  $k$ . Cette technique produit une application  $u_\eta^{\text{th}}$  lisse sauf sur un ensemble singulier de dimension  $m - [kp] - 1$ , créé par l'épaississement.

Comme  $u_\eta^{\text{th}}$  ne dépend que des valeurs de  $u_\eta^{\text{sm}}$  là où cette dernière prend ses valeurs dans le voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$ , on peut utiliser la projection sur le point le plus proche, et à l'aide d'estimations précises, on parvient à prouver le Théorème 5.15.

Le Théorème 5.14 s'obtient ensuite à l'aide d'une version plus élaborée de la méthode d'effacement des singularités présentée dans la Section 5.5. À nouveau, on bouche les singularités créées par l'épaississement à l'aide d'une extension lisse, dont l'existence est garantie en présence de la condition topologique sur  $\mathcal{N}$ , et on utilise une technique de *contraction*, analogue au Lemme 5.8, pour contrôler la norme de l'application ainsi obtenue. Cette technique de contraction peut être pensée comme une version désingularisée de l'épaississement, qui requiert par conséquent des estimations plus précises.

### 5.7.3 Un mot sur le problème de l'approximation faible

Au cours de la Section 5.3, nous avons eu l'occasion de mentionner la notion de convergence faible pour les espaces de Sobolev à valeurs variétés. Nous l'avons utilisée comme un outil intermédiaire, mais il s'agit en fait d'un problème à part entière. Plus précisément, nous formulons le problème suivant.

**Problème 4.** Pour toute fonction  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , existe-t-il une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathcal{N})$  bornée dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  et telle que  $u_n \rightarrow u$  presque partout ?

Bien entendu, dès que la réponse au problème de l'approximation forte est positive, il en est de même pour l'approximation faible. Le problème devient plus intéressant lorsque l'approximation forte échoue.

Dans le cas où  $sp \notin \mathbb{N}$ , l'approximation faible se heurte à la même obstruction que l'approximation forte. Le résultat est dû à Bethuel [2, Theorem 3], mais on pourra également consulter [11, Theorem 5].

**Théorème 5.16.** *Supposons que  $sp < m$  avec  $sp \notin \mathbb{N}$ . Si  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , alors il existe  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telle qu'il n'existe aucune suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant faiblement vers  $u$ .*

À l'inverse, lorsque  $sp \in \mathbb{N}$ , il existe des cas où l'approximation forte échoue mais où l'approximation faible tient.

**Théorème 5.17.** *Supposons que  $s \geq 1$  et que  $sp < m$  avec  $sp \in \mathbb{N}$ . Si  $\pi_0(\mathcal{N}) = \dots = \pi_{sp-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , alors pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\bar{\Omega}; \mathcal{N})$  convergeant faiblement vers  $u$ .*

Ce théorème est dû à Hajłasz lorsque  $s = 1$  [32, Corollary 1] et à Bousquet, Ponce et Van Schaftingen [11, Theorem 6] lorsque  $s \geq 1$ . Notons que  $[sp] = sp$ , et ce théorème s'applique donc à des variétés telles que  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ . Pour des variétés générales ne vérifiant pas l'hypothèse topologique du Théorème 5.17, la question de l'approximation au sens faible reste *ouverte*. Mentionnons tout de même quelques résultats partiels dans cette direction, dont l'article de Pakzad [50] de 2003 traitant le

cas  $s = 1 = p$ , l'article de Pakzad et Rivière [51] de 2003 considérant le cas  $s = 1, p = 2$ , et l'article de Bethuel [5] de 2020 donnant un contre-exemple à la densité faible dans  $W^{1,3}(\mathbb{B}^4; \mathbb{S}^2)$ .

Nous concluons par un bref commentaire sur l'hypothèse topologique  $\pi_0(\mathcal{N}) = \dots = \pi_{s,p-1}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , qui offre une transition vers le chapitre suivant. Dans le cas surcritique, nous avons obtenu des résultats d'approximation en travaillant sur  $u$  dans la cible, à l'aide de la projection sur le point le plus proche. Dans le cas sous-critique, cette approche échoue, et les résultats que nous avons présentés reposent sur des manipulations dans le domaine. Néanmoins, sous l'hypothèse topologique qui précède, il reste possible de travailler sur la cible. La projection sur le point le plus proche n'est pas disponible dans le cas sous-critique, mais on peut la remplacer par un outil plus élaboré, appelé *projection singulière*, et qui est l'objet du chapitre qui suit.



# Chapitre 6

## La méthode de la projection singulière

### 6.1 Extension par la méthode de la projection singulière

Dans les Chapitres 2 et 3, nous avons utilisé de façon cruciale la projection sur le point le plus proche de  $\mathcal{N}$  pour obtenir des résultats d'approximation et d'extension. La limitation majeure de cet outil provient du fait que cette projection n'est définie que sur un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ . Dans le cas surcritique  $sp \geq m$ , l'injection de  $W^{s,p}$  dans  $C^0$  ou VMO nous assurait que, étant donnés  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ ,  $\rho$  un noyau régularisant et  $t$  suffisamment petit,  $\rho_t * u$  prenait ses valeurs entièrement dans  $\mathcal{O}$ . Ceci permettait de définir  $\Pi \circ (\rho_t * u)$  et ainsi obtenir des résultats d'approximation ou d'extension comme dans le cas réel. Dans le cas sous-critique  $sp < m$ ,  $\rho_t * u$  n'a aucune raison de prendre ses valeurs entièrement dans  $\mathcal{O}$  même pour  $t$  suffisamment réduit, et cette approche échoue donc complètement.

Nous souhaiterions donc disposer d'une projection  $P$  sur  $\mathcal{N}$  définie *globalement* sur  $\mathbb{R}^v$  et satisfaisant  $P(y) = y$  pour tout  $y \in \mathcal{N}$ , ce qui nous permettrait de procéder dans le cas sous-critique à la même approche que dans le cas surcritique. Malheureusement, l'existence d'une telle projection globalement définie et lisse est sans espoir. Pour  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^\ell$ , cela suit du fait bien connu qu'il n'existe aucune rétraction continue de  $\mathbb{B}^{\ell+1}$  sur  $\mathbb{S}^\ell$ . Plus généralement, nous avons l'obstruction topologique suivante.

**Proposition 6.1.** *Supposons que  $\pi_\ell(\mathcal{N}) \neq \{0\}$  pour un certain  $\ell \in \mathbb{N}$ . Alors il n'existe aucune application continue  $P: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathcal{N}$  telle que  $P(y) = y$  pour tout  $y \in \mathcal{N}$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'une telle application existe. Pour toute fonction continue  $f: \mathbb{S}^\ell \rightarrow \mathcal{N}$ , on peut définir  $H: \mathbb{S}^\ell \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$  par  $H(x, t) = P(tf(x))$ . Nous avons alors  $H(x, 1) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^\ell$  et  $H(x, 0) = P(0)$ , montrant que  $f$  est homotope à une application constante. Comme  $f$  était arbitraire, cela contredit le fait que  $\pi_\ell(\mathcal{N}) \neq \{0\}$  et achève la preuve.  $\square$

Comme toute variété compacte sans bord possède un groupe d'homotopie non trivial, cette proposition montre en fait que la projection globale que nous souhaitons n'existe pour aucune variété compacte sans bord  $\mathcal{N}$ . Cependant, cette approche peut être réparée. En effet, une telle projection  $P$  peut être construite pour peu qu'on soit prêt à accepter que  $P$  soit définie uniquement sur  $\mathbb{R}^v \setminus \Xi$ , où  $\Xi$  est un ensemble singulier dont la dimension dépend des groupes d'homotopie de  $\mathcal{N}$ , et où la singularité du gradient de  $P$  à l'approche de  $\Xi$  est contrôlée en termes de la distance par rapport à  $\Xi$ . Nous l'appellerons *projection singulière*.

Cette méthode fut introduite par Hardt et Lin, qui l'employèrent pour obtenir le premier résultat d'extension lorsque  $p < m$  [34, Theorem 6.2]. Étant donné  $\ell \in \mathbb{N}$ , on dit que  $\mathcal{N}$  est  $\ell$ -connexe lorsque  $\pi_0(\mathcal{N}) = \dots = \pi_\ell(\mathcal{N}) = \{0\}$ .

**Théorème 6.2.** *Supposons que  $1 \leq p < m$  et que  $\mathcal{N}$  est  $[p - 1]$ -connexe. Alors  $\mathcal{N}$  possède la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à  $\Omega$ .*

Ce théorème, et surtout la méthode permettant de le démontrer, sera le centre d'intérêt de ce chapitre. Dans la Section 6.2, nous expliquerons comment construire la projection singulière  $P$  que nous avons décrite plus haut. Nous souhaiterons ensuite composer  $P$  avec une application lisse  $v$  – qui sera par la suite choisie comme étant une extension d'une application de  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$  à  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^v$ . Cependant, rien n'assure que l'image de  $v$  n'est pas entièrement contenue dans l'ensemble singulier de  $P$ . La Section 6.3 sera dédiée à un argument de généricité reposant sur le théorème de Morse-Sard permettant de s'assurer que, pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , l'ensemble singulier de  $P \circ (v - h)$  n'est « pas trop grand ». La Section 6.4 conclura la démonstration du Théorème 6.2 en fournissant une estimation de l'énergie de  $P \circ (v - h)$  pour un  $h$  générique à l'aide d'un argument de moyenne originellement dû à Federer et Fleming. Enfin, dans la Section 6.5, nous verrons comment la méthode de la projection singulière peut également être employée pour fournir des résultats d'approximation. Ce sera l'occasion de revenir à la classe  $\mathcal{R}_p$  que nous avons introduite dans la Section 5.6 et d'énoncer un joli problème ouvert concernant la question de l'approximation.

## 6.2 Construction de la projection singulière

Le résultat principal de cette section est la proposition suivante, qui fournit la projection singulière que nous souhaitons.

**Proposition 6.3.** *Soit  $\ell \in \{0, \dots, v - 2\}$ , et supposons que  $\mathcal{N}$  est  $\ell$ -connexe. Soit  $\iota > 0$  le rayon d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ . Pour tout  $0 < \rho < \frac{\iota}{2}$ , il existe un compact  $\Xi \subset \mathcal{O} \setminus (\mathcal{N} + B_\rho)$  et une application  $P: \mathbb{R}^v \setminus \Xi \rightarrow \mathcal{N} + B_{\iota/2}$  localement lipschitzienne tels que*

- (a)  $\Xi$  est une union finie de portions de  $(v - \ell - 2)$ -hyperplans ;
- (b) pour tout  $y \in \mathcal{N} + B_\rho$ ,  $P(y) = y$  ;
- (c) pour tout  $y \in \mathbb{R}^v \setminus \Xi$ ,

$$|DP(y)| \leq \frac{C}{\text{dist}(y, \Xi)};$$

- (d)  $P$  est constante en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^v$ .

Cette projection fut construite pour la première fois par Hardt et Lin [34, Lemma 6.1]. Leur preuve repose sur des arguments abstraits de topologie algébrique. Nous empruntons l'énoncé et la démonstration que nous présentons à Van Schaftingen [56, Proposition 4.4]. Ceci nous permet de donner un argument plus élémentaire, et ainsi d'éviter le recours à des « boîtes noires » abstraites, en accord avec l'esprit du présent travail.

Remarquons que la projection annoncée n'est pas à valeurs dans  $\mathcal{N}$  mais plutôt dans  $\mathcal{N} + B_{\iota/2}$ . Cependant, il suffit ensuite de composer avec la projection sur le point le plus proche pour obtenir une projection sur  $\mathcal{N}$ , ce que nous ferons à la fin de la démonstration du Théorème 6.2.

Avant de donner la démonstration de ce résultat dans le cas général, nous présentons deux exemples.

**Exemple 6.4.** Considérons la sphère  $\mathcal{N} = \mathbf{S}^{\ell+1} \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$ , qui est bien  $\ell$ -connexe. On définit  $\Xi = \{0\}$  et  $P: \mathbb{R}^{\ell+2} \setminus \Xi \rightarrow \mathbb{R}^{\ell+2}$  par

$$P(y) = \begin{cases} \frac{(1-\rho)y}{|y|} & \text{si } |y| < 1 - \rho, \\ y & \text{si } 1 - \rho \leq |y| \leq 1 + \rho, \\ \frac{(1-\rho)y}{|y|} & \text{si } |y| > 1 + \rho. \end{cases}$$

Nous observons que  $\Xi$  est un ensemble de dimension  $0 = \ell + 2 - \ell - 2$  et que

$$|DP(y)| \leq \frac{C}{|y|} = \frac{C}{\text{dist}(y, \Xi)}.$$

On vérifie donc que  $\Xi$  et  $P$  satisfont à la conclusion de la Proposition 6.3, à l'exception du point (d).

Cet exemple continuera de nous accompagner dans la suite du chapitre et servira d'illustration aux différentes étapes de notre raisonnement. Nous fournissons un second exemple dans lequel la codimension de la variété dans l'espace dans lequel elle est plongée est différente de 1.

**Exemple 6.5.** Considérons le cylindre  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$ , qui est 0-connexe. Notons que  $\mathcal{N}$  n'est pas compacte. On peut obtenir un exemple analogue avec le  $(\ell + 1)$ -tore obtenu comme un produit de  $\ell + 1$  cercles, mais renoncer à la compacité en travaillant avec le cylindre permet d'obtenir un exemple plus clair.

Définissons  $\Xi = \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^\ell$  et  $P: \mathbb{R}^{\ell+2} \setminus \Xi \rightarrow \mathbb{R}^{\ell+2}$  pour  $x = (y, x') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^\ell$  par

$$P(x) = \begin{cases} \left( \frac{(1-\rho)y}{|y|}, x' \right) & \text{si } |y| < 1 - \rho, \\ (y, x') & \text{si } 1 - \rho \leq |y| \leq 1 + \rho, \\ \left( \frac{(1-\rho)y}{|y|}, x' \right) & \text{si } |y| > 1 + \rho. \end{cases}$$

Comme  $\text{dist}(x, \Xi) = |y|$ , on vérifie à nouveau que  $P$  et  $\Xi$  satisfont à la conclusion de la Proposition 6.3, à l'exception du point (d).

Nous procédons à présent à la construction générale de la projection singulière.

*Démonstration de la Proposition 6.3.* Considérons pour  $\eta > 0$  la famille de cubes  $\mathcal{K}_\eta = \{k\eta + [-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]^v : k \in \mathbb{Z}^v\}$  dans  $\mathbb{R}^v$ . Soit  $\mathcal{U}_\eta = \{Q \in \mathcal{K}_\eta : Q \subset \mathcal{N} + B_{\ell/2}\}$ . On définit  $P(y) = y$  pour tout  $y \in U_\eta$ . Si  $\eta$  est choisi suffisamment réduit, comme  $\rho < \frac{1}{2}$ , nous avons  $\mathcal{N} + B_\rho \subset U_\eta$ , ce qui assure que  $P$  vérifie le point (b).

Nous définissons ensuite  $P$  loin de  $\mathcal{N}$  en accord avec le point (d). Soit  $\mathcal{V}_\eta = \{Q \in \mathcal{K}_\eta : Q \cap U_\eta = \emptyset\}$ . On choisit  $b \in \mathcal{N}$  et on définit  $P = b$  sur  $V_\eta$ .

Il nous reste à définir  $P$  sur  $W_\eta$ , où  $\mathcal{W}_\eta = \mathcal{K}_\eta \setminus (\mathcal{U}_\eta \cup \mathcal{V}_\eta)$ , en s'assurant de la compatibilité au bord. Pour chaque  $y \in W_\eta^0$  tel que  $y \notin U_\eta^0$ , on définit  $P(y) = b$ . On procède ensuite inductivement.

Supposons que  $P$  a déjà été définie sur  $W_\eta^j$  pour un certain  $j \in \{0, \dots, v-1\}$ . Dans le cas où  $j \leq \ell$ , on peut utiliser la condition  $\pi_j(\mathcal{N}) = \{0\}$  pour étendre continûment  $P|_{\partial\sigma}$  à  $\sigma$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{W}_\eta^{j+1} \setminus (\mathcal{U}_\eta^{j+1} \cup \mathcal{V}_\eta^{j+1})$ . En raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 3.9, on peut faire en sorte que  $P$  soit lisse à l'intérieur de  $\sigma$ . Dès lors,  $P$  est définie et globalement lipschitzienne sur  $W_\eta^{j+1}$ . Dans le cas où  $j > \ell$ , on étend  $P|_{\partial\sigma}$  à  $\sigma$  par extension homogène sur chaque cube  $\sigma \in \mathcal{W}_\eta^{j+1} \setminus (\mathcal{U}_\eta^{j+1} \cup \mathcal{V}_\eta^{j+1})$ .

Ceci fournit bien la projection singulière souhaitée. Les points (b) et (d) ont déjà été vérifiés. L'ensemble singulier  $\Xi$  est l'ensemble singulier créé par la technique d'extension homogène, et les points (a) et (c) suivent par induction en utilisant les propriétés de l'extension homogène.  $\square$

## 6.3 Composition avec la projection : le théorème de Morse-Sard

À présent que nous avons construit une projection singulière, notre objectif est le suivant. Étant donnée une fonction  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$ , nous souhaitons construire une extension de  $u$  à valeurs dans  $\mathcal{N}$  en posant  $U = \Pi \circ P \circ v$ , où  $v$  est une extension à valeurs dans  $\mathbb{R}^v$  fournie par le Théorème 3.3. Cependant, rien n'assure que l'ensemble singulier de  $U$ , consistant en l'ensemble des  $x \in \Omega$  tels que  $v(x) \in \Xi$ , n'est pas trop grand. Le résultat principal de cette section assure que, quitte à effectuer une translation par un  $h \in \mathbb{R}^v$  générique, ce n'est pas le cas. Dans la suite de la section,  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$  désigne une application lisse.

**Lemme 6.6.** *Soit  $\ell \in \{0, \dots, v-2\}$ . Supposons que  $\mathcal{N}$  est  $\ell$ -connexe, et soit  $P: \mathbb{R}^v \setminus \Xi \rightarrow \mathcal{N} + B_{1/2}$  la projection fournie par la Proposition 6.3. Pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , la fonction  $P \circ (v - h)$  est bien définie et localement lipschitzienne sur  $\Omega \setminus \Sigma$ , où  $\Sigma \subset \Omega$  est contenu dans une union finie de sous-variétés  $(m - \ell - 2)$ -dimensionnelles de  $\Omega$ .*

La preuve de ce résultat repose sur la notion de *valeur régulière* et sur le théorème de Morse-Sard, que nous rappelons ci-dessous.

**Définition 6.7.** *Soit  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$  une application lisse. On dit que  $a \in \mathbb{R}^{m'}$  est une valeur régulière de  $f$  lorsque la différentielle  $Df(x)$  est surjective pour tout  $x \in f^{-1}(\{a\})$ .*

L'intérêt des valeurs régulières est que, d'après le *théorème de submersion*, leur image inverse par  $f$  est une sous-variété; voir par exemple [40, Lemma 1].

**Proposition 6.8.** *Soit  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$  une application lisse, et soit  $a \in \mathbb{R}^{m'}$  une valeur régulière. L'image inverse  $f^{-1}(\{a\})$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$ , de dimension  $m - m'$ .*

Notons que  $f^{-1}(\{a\})$  peut être vide dans le cas où  $a$  n'est pas une valeur image de  $f$ , mais le vide est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  de dimension  $k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Lorsque  $m' > m$ , nous avons  $m - m' < 0$ , mais une valeur  $a \in \mathbb{R}^{m'}$  n'est régulière que si  $f^{-1}(\{a\})$  est vide puisqu'il n'existe aucune application linéaire surjective  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ .

Le *théorème de Morse-Sard* – parfois également appelé *lemme de Sard-Brown* – assure que presque toute valeur est régulière; voir par exemple [40, § 2].

**Théorème 6.9.** *Soit  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$  une application lisse. Presque tout  $a \in \mathbb{R}^{m'}$  est une valeur régulière de  $f$ .*

Avec ces outils à disposition, nous pouvons d'ores et déjà démontrer le Lemme 6.6 dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{\ell+1}$  et où  $P$  est la projection construite dans l'Exemple 6.4. Ce cas plus simple nous servira d'illustration avant de procéder au cas général, qui requiert un raisonnement légèrement plus élaboré. En outre, nous obtiendrons légèrement mieux que la conclusion du Lemme 6.6, ce qui nous servira dans la Section 6.5.

*Démonstration du Lemme 6.6 lorsque  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{\ell+1}$ .* Pour tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , la fonction  $P \circ (v - h)$  est bien définie et localement lipschitzienne sur  $\Omega \setminus \Sigma$ , où  $\Sigma = v^{-1}(\mathcal{E} + h)$ . Dans le cas où  $P$  est donnée par l'Exemple 6.4, nous avons  $\mathcal{E} = \{0\}$  et donc  $\Sigma = v^{-1}(\{h\})$ . Comme  $v$  est lisse, le théorème de Morse-Sard assure que presque tout  $h$  est une valeur régulière de  $v$ . Or, pour toute valeur régulière  $h$  de  $v$ , l'image inverse  $v^{-1}(\{h\})$  est une sous-variété de  $\Omega$  de dimension  $m - (\ell + 2)$ . Ceci permet de conclure, et on note que dans ce cas, il n'est pas nécessaire de permettre à  $\Sigma$  d'être contenu dans une union de sous-variétés de dimension  $m - (\ell + 2)$ . En effet, nous avons obtenu que  $\Sigma$  est une sous-variété de dimension  $m - (\ell + 2)$ .  $\square$

Dans le cas général, l'ensemble singulier  $\Sigma$  n'est plus l'image inverse d'un singleton, mais d'un ensemble de dimension  $v - \ell - 2$ . Nous ne pouvons donc plus conclure par simple application du théorème de submersion combiné avec le théorème de Morse-Sard, un peu plus de travail étant nécessaire. L'argument que nous allons employer évoque la notion de *transversalité*. Cependant, comme  $\mathcal{E}$  est une union de  $(v - \ell - 2)$ -hyperplans, qui ont une géométrie très simple, il n'est pas nécessaire de développer ce concept dans sa généralité, et un argument « à la main » reste possible.

*Démonstration du Lemme 6.6 dans le cas général.* Comme précédemment, il est suffisant de montrer que  $v^{-1}(\mathcal{E} + h)$  est contenu dans une union finie de sous-variétés de  $\Omega$  de dimension  $m - (\ell + 2)$  pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ . Par construction,  $\mathcal{E}$  est une union finie de portions de  $(v - \ell - 2)$ -hyperplans. Il suffit donc de montrer que pour tout  $(v - \ell - 2)$ -hyperplan  $H \subset \mathbb{R}^v$ ,  $v^{-1}(H + h)$  est une sous-variété de  $\Omega$  de dimension  $m - (\ell + 2)$  pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ . Nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $H = \mathbb{R}^{v-(\ell-2)} \times \{0\}$ , le cas général s'obtenant à partir de ce cas particulier après composition avec une transformation orthogonale.

Soit  $p: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^{\ell+2}$  la projection sur les  $\ell + 2$  dernières composantes, définie par  $p(x_1, \dots, x_{v-\ell-2}, x_{v-\ell-1}, \dots, x_v) = (x_{v-\ell-1}, \dots, x_v)$ . On observe que  $f = p \circ v$  est lisse et que  $v^{-1}(H + h) = f^{-1}(\{p(h)\})$ . Le théorème de Morse-Sard combiné au théorème de submersion assure l'existence de  $E \subset \mathbb{R}^{\ell+2}$  négligeable tel que  $f^{-1}(\{a\})$  est une sous-variété de  $\Omega$  de dimension  $m - \ell - 2$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^{\ell+2} \setminus E$ . On conclut en observant que  $p(h) \in \mathbb{R}^{\ell+2} \setminus E$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^v \setminus (\mathbb{R}^{v-\ell-2} \times E)$ , où  $\mathbb{R}^{v-\ell-2} \times E$  est un sous-ensemble négligeable de  $\mathbb{R}^v$ .  $\square$

## 6.4 Estimation de l'énergie : l'argument de moyenne de Federer-Fleming

Dans les sections précédentes, nous avons construit une projection singulière sur un voisinage de  $\mathcal{N}$  et montré que si  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$  est une fonction lisse, alors pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , la fonction  $P \circ (v - h)$  est localement lipschitzienne sauf sur un ensemble singulier de dimension au plus  $m - \ell - 2$ . Pour obtenir la régularité de Sobolev sur  $P \circ (v - h)$ , il nous reste à obtenir une estimation sur la norme de son gradient, ce qui est l'objet du lemme suivant.

**Lemme 6.10.** *Supposons que  $1 \leq p < m$  et que  $\mathcal{N}$  est  $[p - 1]$ -connexe. Soit  $P$  la projection singulière fournie par la Proposition 6.3 pour  $\ell = [p - 1]$  et soit  $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  une fonction lisse. Pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , nous avons*

$$\int_{\Omega} |\nabla(P \circ (v - h))|^p dx < +\infty.$$

Dans ce lemme, le gradient de  $P \circ (v - h)$  est entendu au sens classique, et le Lemme 6.6 assure que pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , ce gradient existe sur  $\Omega \setminus \Sigma$ , avec  $\Sigma$  décrit dans le Lemme 6.6. En particulier, comme  $m - \ell - 2 \leq m - 2$ , l'ensemble  $\Sigma$  est négligeable dans  $\Omega$ , et le gradient de  $P \circ (v - h)$  est donc défini presque partout sur  $\Omega$ .

L'ingrédient clé de la démonstration est l'emploi d'un élégant argument de moyenne, originellement dû à Federer et Fleming [28]. L'idée est la suivante. *A priori*, il n'est pas clair qu'on peut estimer la norme du gradient de  $P \circ (v - h)$  pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$  fixé. Nous allons donc intégrer cette norme par rapport à  $h$  sur une boule centrée en 0, et une simple utilisation du théorème de Tonelli combinée aux estimations sur la différentielle de  $P$  suffira à montrer que cette intégrale est finie. Mais alors, pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , la norme du gradient de  $P \circ (v - h)$  doit être finie.

*Démonstration.* Soit  $r > 0$ . On déduit du théorème de Tonelli, de la règle de dérivée de la composée et du point (c) de la Proposition 6.3 que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left( \int_{\Omega} |\nabla(P \circ (v - h))(x)|^p dx \right) dh &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{B_r} |DP(v(x) - h)|^p |\nabla v(x)|^p dh \right) dx \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p \left( \int_{B_r} \frac{1}{\text{dist}(v(x) - h, \Xi)^p} dh \right) dx. \end{aligned}$$

Comme  $\Xi$  est une union finie d'hyperplans de codimension  $\ell + 2 = [p + 1]$  et que  $p < [p + 1]$ , l'intégrale par rapport à  $h$  dans le membre de droite est bornée indépendamment

de  $v(x)$ , et donc de  $x$ . On en déduit que

$$\int_{B_r} \left( \int_{\Omega} |\nabla(P \circ (v - h))(x)|^p dx \right) dh \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p dx < +\infty.$$

Notons que  $C_2$  dépend de  $r$ . Nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla(P \circ (v - h))(x)|^p dx < +\infty \quad \text{pour presque tout } h \in B_r,$$

et comme  $r > 0$  était arbitraire, la conclusion suit.  $\square$

Nous pouvons à présent démontrer le Théorème 6.2. Pour obtenir la régularité  $W^{1,p}$ , nous avons besoin de pouvoir déduire l'existence du gradient faible de l'existence du gradient au sens fort en dehors de l'ensemble singulier combinée avec l'estimation sur la norme du gradient. Nous nous reposons sur le lemme suivant, que nous admettons. Le lecteur pourra consulter [22, Lemma 1.10] et les références qui y sont fournies. On trouvera également une démonstration basée sur les capacités de Sobolev dans [52, Proposition 4.18].

**Lemme 6.11.** *Soit  $S \subset \Omega$  un compact tel que  $\mathcal{H}^{m-1}(S) = 0$ , où  $\mathcal{H}^{m-1}$  est la mesure de Hausdorff  $(m-1)$ -dimensionnelle. Si  $u \in C^\infty(\Omega \setminus S)$  est telle que  $u \in L^p(\Omega)$  et  $\nabla u \in L^p(\Omega)$ , alors  $\nabla u$  est le gradient faible de  $u$  sur  $\Omega$  et  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .*

*Démonstration du Théorème 6.2.* Soit  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Le théorème d'extension pour les fonctions à valeurs réelles assure l'existence de  $v \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  telle que  $\text{tr } v = u$  sur  $\partial\Omega$ . De plus, nous pouvons choisir  $v$  lisse à l'intérieur de  $\Omega$ . Les Lemmes 6.6 et 6.10 assurent que pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ , l'application  $P \circ (v - h)$  est dérivable au sens classique en dehors d'un sous-ensemble  $\Sigma \subset \Omega$  de dimension au plus  $m-2$ , avec

$$\int_{\Omega} |\nabla P \circ (v - h)|^p dx < +\infty.$$

En outre,  $P \circ (v - h)$  est bornée par construction. Par conséquent,  $P \circ (v - h) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  en vertu du Lemme 6.11.

Choisissons  $h \in B_\rho$  comme ci-haut – où  $0 < \rho < \frac{1}{2}$  a été choisi pour construire  $P$  – et définissons  $U = \Pi(P \circ (v - h) + h)$ . Comme  $P$  est à valeurs dans  $\mathcal{N} + B_{1/2}$ , nous savons que  $P \circ (v - h) + h \in \mathcal{O}$ , et  $U$  est donc bien définie. En outre,  $U \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Comme  $P(y) = y$  pour tout  $y \in \mathcal{N} + B_\rho$ , nous avons également  $\text{tr } U = \text{tr } v = u$  sur  $\partial\Omega$ , ce qui achève de montrer que  $U$  est bien l'extension souhaitée.  $\square$

## 6.5 Approximation par la méthode de la projection singulière

Dans cette section, nous montrons comment la méthode de la projection singulière, initialement développée par Hardt et Lin pour traiter le problème de l'extension, peut être appliquée à l'étude du problème de l'approximation. Nous suivons l'approche introduite par Bethuel et Zheng [8] dans le cas de la sphère, mais grâce au travail effectué dans la Section 6.2, nous pouvons nous placer dans un cadre plus général. On pourra également consulter [22, Section 10.2] et les références qui s'y trouvent pour une discussion pour des exposants  $s$  et  $p$  généraux. Comme précédemment, nous supposons que  $\mathcal{N}$  est  $[p - 1]$ -connexe. Notre objectif est le théorème suivant.

**Théorème 6.12.** *Supposons que  $\mathcal{N}$  est  $[p - 1]$ -connexe. La classe  $\mathcal{R}_p(\Omega; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .*

*Démonstration.* Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Le théorème de densité classique assure l'existence d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^v)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . Soit  $P: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$  la projection singulière construite par la Proposition 6.3 pour un certain  $0 < \rho < \frac{1}{2}$ . Nous observons que  $P \in C^0(\mathbb{R}^v \setminus \Xi; \mathbb{R}^v)$ , et par conséquent,  $P \circ (u_n - h) \in C^0(\mathbb{R}^v \setminus \Sigma_{h,n}; \mathbb{R}^v)$ , où  $\Sigma_{h,n} = \{x \in \Omega : u_n(x) - h \in \Xi\}$ . Comme dans la Section 6.3, le théorème de Morse-Sard combiné au théorème de submersion assure que pour presque tout  $h \in \mathbb{R}^v$ ,  $\Sigma_{h,n}$  est contenu dans une union de sous-variétés de  $\Omega$  de dimension  $m - [p] - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Nous utilisons à présent l'argument de moyenne de Federer-Fleming. Comme dans la Section 6.4, nous calculons

$$\int_{B_{\rho/2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx \right) dh \leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p \left( \int_{B_{\rho/2}} \frac{1}{\text{dist}(u_n(x) - h, \Xi)^p} dh \right) dx.$$

Comme dans la démonstration du Lemme 6.10, l'intégrale par rapport à  $h$  dans le membre de droite est bornée indépendamment de  $u_n(x)$ , et donc de  $x$ , et nous obtenons par conséquent

$$\int_{B_{\rho/2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx \right) dh \leq C_2 \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx < +\infty.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\int_{\Omega} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx < +\infty \quad \text{pour presque tout } h \in B_{\rho/2}.$$

Puisque l'union d'ensembles négligeables est négligeable et en utilisant le Lemme 6.11, applicable car  $m - [p] - 1 \leq m - 2$ , on en déduit l'existence de  $H \subset B_{\rho/2}$  de mesure nulle

tel que pour tout  $h \in B_{\rho/2} \setminus H$ , nous avons  $P \circ (u_n - h) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v) \cap C^0(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_{h,n}; \mathbb{R}^v)$ , avec  $\Sigma_{h,n}$  contenu dans une union de sous-variétés de  $\Omega$  de dimension  $m - [p] - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Posons  $v_n = P \circ (u_n - h_n) + h_n$  avec  $h_n \in B_{\rho/2} \setminus H$ . Comme  $P(y) = y$  pour tout  $y \in \mathcal{N} + B_{\rho}$ , nous avons  $v_n = u_n$  et  $\nabla v_n = \nabla u_n$  presque partout sur  $\Omega \setminus U_n$ , où  $U_n = \{x \in \Omega : u_n \notin \mathcal{N} + B_{\rho/2}\}$ . Or, comme  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^v)$ , en particulier  $u_n \rightarrow u$  en mesure, et donc  $|U_n| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Étant donné que  $\mathcal{N}$  est compacte, nous avons

$$\int_{\Omega} |v_n - u|^p dx \leq C_3 |U_n| \rightarrow 0,$$

montrant que  $v_n \rightarrow u$  dans  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^v)$ .

Par ailleurs, nous estimons

$$\int_{\Omega} |\nabla(v_n - u)|^p dx \leq C_4 \int_{U_n} |\nabla u|^p dx + C_4 \int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h_n))|^p dx.$$

Nous employons à nouveau l'argument de moyenne de Federer-Fleming, mais nous devons cette fois raisonner avec plus de précision car nous souhaitons une estimation indépendante de  $n$ . Nous écrivons

$$\int_{B_{\rho/2}} \left( \int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx \right) dh \leq C_5 \int_{U_n} |\nabla u_n|^p dx.$$

L'inégalité de Markov assure que

$$\left| \left\{ h \in B_{\rho/2} : \int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx > 2|B_{\rho/2}|^{-1} C_5 \int_{U_n} |\nabla u_n|^p dx \right\} \right| \leq \frac{|B_{\rho/2}|}{2}.$$

Avec  $C_6 = 2|B_{\rho/2}|^{-1} C_5$ , nous avons donc

$$\left| \left\{ h \in B_{\rho/2} : \int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h))|^p dx \leq C_6 \int_{U_n} |\nabla u_n|^p dx \right\} \right| > 0.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $h_n \in B_{\rho/2} \setminus H$  tel que

$$\int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h_n))|^p dx \leq C_6 \int_{U_n} |\nabla u_n|^p dx.$$

Notons ici que  $C_6$  ne dépend pas de  $n$ , mais qu'il est en revanche nécessaire de choisir  $h_n$  dépendamment de  $n$ . Comme  $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$  dans  $L^p$ , quitte à extraire une sous-suite, la réciproque partielle du théorème de convergence dominée assure l'existence de

$g \in L^p(\Omega)$  telle que  $|\nabla u_n| \leq g$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui permet de déduire que

$$\int_{U_n} |\nabla(P \circ (u_n - h_n))|^p dx \leq C_6 \int_{U_n} g^p dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

On en conclut que

$$\int_{\Omega} |\nabla(v_n - u)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

ce qui achève de prouver que  $v_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ .

À présent, puisque  $P$  est à valeurs dans  $\mathcal{N} + B_{\iota/2}$  et  $h \in B_{\iota/2}$ , nous avons  $v_n \in \mathcal{O}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et il suffit donc de composer  $v_n$  avec la projection sur le point le plus proche sur  $\mathcal{N}$  pour obtenir une suite de fonctions  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $w_n \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N}) \cap C^0(\overline{\Omega} \setminus \Sigma_n; \mathcal{N})$  et  $w_n \rightarrow w$  dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , où  $\Sigma_n$  est contenu dans une union de sous-variétés de  $\Omega$  de dimension  $m - [p] - 1$ . Par un argument de régularisation, nous pouvons ensuite améliorer la régularité des  $w_n$  pour approcher  $u$  par une suite de fonctions lisses en dehors de  $\Sigma_n$ , et non pas uniquement continues en dehors de cet ensemble singulier.  $\square$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{N} = \mathbf{S}^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ , on peut améliorer cette conclusion. On se concentre sur la gamme  $\ell \leq p < \ell + 1$ , dans laquelle nous avons bien que  $\mathbf{S}^\ell$  est  $[p - 1]$ -connexe. Comme  $\pi_k(\mathbf{S}^\ell) = \{0\}$  pour  $k < \ell$ , la combinaison du Théorème 5.1 et de la théorie du cas surcritique fournit déjà une réponse affirmative au problème de l'approximation pour les autres valeurs de  $p$ . En reprenant l'Exemple 6.4 et sa continuation dans la Section 6.3, nous voyons que dans ce cas particulier, on peut faire en sorte que l'ensemble singulier soit une véritable sous-variété de dimension  $m - [p] - 1$  de  $\Omega$ . Motivés par ce raisonnement, nous introduisons la classe de fonctions suivante.

**Définition 6.13.** *On définit la classe  $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  comme l'ensemble des  $v \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telles que  $v$  est  $C^\infty$  sur  $\overline{\Omega} \setminus \Sigma$ , où  $\Sigma$  est une sous-variété de dimension  $m - [sp] - 1$  de  $\Omega$  – qui peut dépendre de  $v$ . On note  $\tilde{\mathcal{R}}_p(\Omega; \mathcal{N}) = \tilde{\mathcal{R}}_{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .*

Arrêtons-nous un instant pour comparer  $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  avec la classe  $\mathcal{R}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  introduite dans le Chapitre 5. Ici, nous demandons que l'ensemble singulier soit une véritable sous-variété de dimension  $m - [sp] - 1$ . L'ensemble singulier d'une fonction  $\mathcal{R}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  pourra donc comporter des « croisements », ce qui est interdit pour une fonction  $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .

Avec le raisonnement qui précède, nous avons démontré le théorème suivant.

**Théorème 6.14.** *Soit  $\ell \leq p < \ell + 1$ . La classe  $\tilde{\mathcal{R}}_p(\Omega; \mathbf{S}^\ell)$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbf{S}^\ell)$ .*

Comme  $\tilde{\mathcal{R}}_p(\Omega; \mathcal{N}) \subset \mathcal{R}_p(\Omega; \mathcal{N})$ , lorsqu'il s'applique, le Théorème 6.14 fournit une conclusion strictement meilleure que celle du Théorème 5.10. Cependant, le Théorème 6.14 est spécifique au cas  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^\ell$  et  $\ell \leq p < \ell + 1$ , tandis que le Théorème 5.10 s'applique pour une variété  $\mathcal{N}$  arbitraire et  $1 \leq p < m$  – le cas  $p \geq m$  tombant dans la gamme surcritique, où nous avons densité des fonctions lisses sur tout  $\Omega$ . Le problème de savoir si le Théorème 6.14 reste valide plus généralement lorsque  $sp < m$  et pour une variété  $\mathcal{N}$  arbitraire reste à ce jour *complètement ouvert*, et nous achevons ce chapitre sur cette jolie question.

**Problème ouvert 6.15.** Supposons que  $sp < m$ . La classe  $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  est-elle dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ ?

## 6.6 Commentaires et perspectives

### 6.6.1 Une variante de la projection singulière : approximation lorsque $s > 1$ dans le cas $[sp]$ -connexe

En utilisant une méthode de projection singulière généralisant un argument dû à Hajlasz [32], Bousquet, Ponce et Van Schaftingen [11, Theorem 4] obtinrent une réponse partielle au problème de l'approximation dans le cas ouvert  $s > 1$ ,  $s \notin \mathbb{N}$ , sous des hypothèses plus fortes sur  $\mathcal{N}$ .

**Théorème 6.16.** *Supposons que  $s \geq 1$  et  $sp < m$ . Si  $\mathcal{N}$  est  $[sp]$ -connexe, alors  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  est dense dans  $W^{s,p}(Q; \mathcal{N})$ .*

La projection singulière utilisée dans la preuve de ce résultat est de nature différente de celle que nous avons présentée dans ce chapitre. En effet, pour  $\varepsilon > 0$  fixé, il s'agit d'une application lisse  $\eta_\varepsilon: \mathbb{R}^v \rightarrow \mathcal{N} + B_{\iota/2}$ , où à nouveau  $\iota > 0$  est le rayon d'un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ , et telle que

- (a)  $\eta_\varepsilon(y) = y$  pour tout  $y \in (\mathcal{N} + B_\rho) \setminus K$ , où  $0 < \rho < \frac{\iota}{2}$  et  $K \subset \mathcal{N} + B_\rho$  est un compact tel que  $|K| \leq C\varepsilon^{[sp]+1}$ ;
- (b)  $\|D^j \eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^v)} \leq \frac{C'}{\varepsilon^j}$  pour tout  $j \in \mathbb{N}_*$ .

Autrement dit, la projection  $\eta_\varepsilon$  est bien définie et lisse sur  $\mathbb{R}^v$  tout entier, sans exhiber d'ensemble singulier, mais en contrepartie elle échoue à être une rétraction sur un compact  $K$ , dont la mesure est contrôlée en fonction de  $\varepsilon$ .

Étant donnée une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{Q}; \mathbb{R}^v)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(Q)$ , nous avons  $v_n = \eta_\varepsilon(u_n - h) + h \in W^{s,p}(Q) \cap C^\infty(\overline{Q})$  et  $v_n \rightarrow \eta_\varepsilon(u - h) + h$  dans  $W^{s,p}(Q)$  pour

tout  $h \in \mathbb{R}^v$  en vertu du théorème de composition – Théorème 4.4. Or, par l’inégalité triangulaire,

$$\|v_n - u\|_{W^{s,p}(Q)} \leq \|v_n - \eta_\varepsilon(u - h) + h\|_{W^{s,p}(Q)} + \|\eta_\varepsilon(u - h) + h - u\|_{W^{s,p}(Q)}.$$

Nous observons donc qu’il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut choisir  $h_\varepsilon \in B_{\rho/2}$  tel que  $\|\eta_\varepsilon(u - h_\varepsilon) + h_\varepsilon - u\|_{W^{s,p}(Q)} \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Avec ce choix de  $h_\varepsilon$ , comme  $\eta_\varepsilon$  est à valeurs dans  $\mathcal{N} + B_{t/2}$ , on pourra ensuite projeter  $v_n$  sur le point le plus proche pour obtenir une suite de fonctions lisses sur  $\overline{Q}$  à valeurs dans  $\mathcal{N}$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{s,p}(Q)$ . En particulier, nous voyons qu’avec ce choix de projection singulière, la régularité de la composition avec la projection est automatique, et seule la convergence est à vérifier.

La preuve de la convergence repose à nouveau sur l’argument de moyenne de Federer-Fleming. Pour le terme d’ordre 1, en utilisant les hypothèses sur  $\eta_\varepsilon$ , nous estimons

$$\begin{aligned} \int_{B_{\rho/2}} \left( \int_Q |\nabla(\eta_\varepsilon(u - h) + h - u)|^p dx \right) dh &\leq C_1(1 + \varepsilon^{-p}) \int_{B_{\rho/2}} \left( \int_{\{u-h \in K\}} |\nabla u|^p dx \right) dh \\ &\leq C_2(1 + \varepsilon^{-p}) \varepsilon^{[sp]+1} \int_Q |\nabla u|^p dx, \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  car  $p < [sp] + 1$  étant donné que  $s \geq 1$ .

Nous voyons donc que pour faire fonctionner l’argument de moyenne de Federer-Fleming, nous avons employé l’estimation ponctuelle  $|\nabla \eta_\varepsilon(u - h)| \leq \|D\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^v)} |\nabla u|$ , avec  $\nabla u \in L^p(Q)$ . De la même façon, l’estimation des termes associés aux dérivées d’ordre supérieur repose sur le même raisonnement, en utilisant une majoration ponctuelle de  $|D^j \eta_\varepsilon(u - h)|$  par une fonction dans  $L^p$  dépendant de  $\eta_\varepsilon$  et  $u$ . Cette majoration s’obtient à l’aide de la formule de Faà di Bruno et de l’inégalité de Gagliardo-Nirenberg classique. L’estimation du terme fractionnaire est plus délicate en raison du caractère non local de la semi-norme de Gagliardo. L’argument repose sur une estimation de la quantité

$$D^{s,p}u(x) = \left( \int_Q \frac{|D^{[s]}u(x) - D^{[s]}u(y)|^p}{|x - y|^{m+sp}} dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

dont la norme  $L^p$  intervient dans la norme  $W^{s,p}$  de  $u$  lorsque  $s \notin \mathbb{N}$ . Cette estimation est dans l’esprit de la démonstration du théorème de composition proposée par Maz’ya et Shaposhnikova [37].

Le Théorème 5.16 concernant l’approximation faible, que nous avons présenté dans la Section 5.7, est obtenu comme un sous-produit de cette technique utilisée pour démontrer le Théorème 6.16.

En utilisant également une méthode de projection singulière, mais cette fois davantage dans l'esprit de celle construite dans la Section 6.2, Bousquet, Ponce et Van Schaftingen obtinrent également un analogue du Théorème 6.16 lorsque  $0 < s < 1$  [12]. Pour cette gamme de valeurs de  $s$ , le résultat était déjà connu sous l'hypothèse plus faible  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) = \{0\}$  – voir le Théorème 5.11 dû à Brezis et Mironescu – mais l'hypothèse plus forte de  $[sp]$ -connexité permet de donner une preuve beaucoup plus simple.

### 6.6.2 Densité de la classe $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}$ lorsque $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ , la réponse au Problème ouvert 6.15 est connue.

**Théorème 6.17.** *Supposons que  $m \geq 2$  et  $1 \leq sp < 2$ . La classe  $\tilde{\mathcal{R}}_{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  est dense dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ .*

Ce théorème est dû à Bousquet [10, Theorem 2]; voir également [22, Theorem 10.3]. La démonstration suit la stratégie de celle du Théorème 6.14, en utilisant le fait que le théorème de Morse-Sard assure que l'ensemble singulier, qui dans ce cas est la préimage d'un singleton, est une véritable sous-variété de  $\Omega$ . Cependant, des estimations plus avancées sont nécessaires pour mener à terme l'argument de moyenne de Federer-Fleming. En particulier, il est nécessaire d'avoir recours à des inégalités de Gagliardo-Nirenberg ainsi qu'au résultat de composition pour les espaces de Sobolev.

# Chapitre 7

## Obstructions analytiques

En ce qui concerne le problème de l'approximation dans le cas d'une variété compacte, d'après la théorie actuelle, l'unique obstruction est de nature topologique, et surgit lorsque  $\pi_{[sp]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ . En l'absence de cette obstruction, la réponse au problème de l'approximation est toujours positive, ou conjecturée comme étant positive dans les cas encore ouverts. À l'inverse, dans l'étude des problèmes de l'extension et du relèvement, des obstructions de nature analytique émergent même en l'absence d'obstructions topologiques.

Contrairement aux obstructions topologiques, qui font intervenir des applications  $W^{s,p}$  exhibant une singularité robuste comme celles présentées dans les Exemples 2.15, 3.11 et 4.6, les obstructions analytiques font intervenir des applications lisses.

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur la méthode de construction de telles obstructions analytiques. Nous nous concentrons sur le problème de l'extension, où la construction de ces obstructions repose sur des applications lisses qui admettent une extension, mais dont l'énergie minimale d'extension  $W^{s,p}$  peut être rendue arbitrairement grande. En recollant une infinité de telles applications, on obtient par conséquent une application qui n'admet pas d'extension de régularité  $W^{s,p}$ . Notre objectif principal est de fournir les étapes clés pour mener ce raisonnement.

### 7.1 Obstructions analytiques à l'extension

Dans la suite, nous expliquons comment construire des obstructions analytiques à l'extension. Cela conduit au théorème suivant, dû à Bethuel et Demengel [7, Theorem 4], Bethuel [4], et Mironescu et Van Schaftingen [45, Theorem 1.5].

**Théorème 7.1.** *Supposons que  $2 \leq p < m$ . Si  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  est infini pour un certain  $\ell \in \{1, \dots, [p-1]\}$  ou si  $p \in \mathbb{N}$  et  $\pi_{p-1}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , alors il existe une application lisse  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^{m-1}; \mathcal{N})$  qui n'admet aucune extension  $U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1); \mathcal{N})$ .*

Cet énoncé fait intervenir la finitude des groupes d'homotopie. Comme pour leur trivialité, cette condition peut se comprendre sans définir ce que sont les groupes d'homotopie : on a  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  fini si et seulement s'il existe un nombre fini d'applications continues  $f_i: \mathbb{S}^\ell \rightarrow \mathcal{N}$  telles que toute application continue  $f: \mathbb{S}^\ell \rightarrow \mathcal{N}$  est homotope à une des  $f_i$ .

Ce résultat porte sur le problème d'extension locale depuis une boule. Bien entendu, cela fournit également une obstruction à l'extension locale depuis le bord d'un ouvert borné lisse  $\Omega$  quelconque, il suffit de greffer l'application  $u$  sur un sous-ensemble de  $\partial\Omega$  contenu dans un domaine de carte. Comme  $1 - \frac{1}{p} \leq 1$ , l'extension par réflexion est disponible – voir par exemple [22, Lemma 15.27] – et on peut donc étendre l'application ainsi construite sur un domaine légèrement plus grand, sur le bord duquel elle sera constamment égale à  $u(0)$ . Il suffit alors d'étendre par  $u(0)$  au reste de  $\partial\Omega$  pour obtenir une application qui ne s'étend pas localement. En particulier, sous les hypothèses du Théorème 7.1,  $\mathcal{N}$  ne possède la propriété d'extension  $W^{1,p}$  par rapport à aucun domaine  $\Omega$ .

Le cas où  $p \in \mathbb{N}$  et  $\pi_{p-1}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$  est compris dans le Théorème 3.12, mais l'apport du résultat ci-haut dans ce cas est d'assurer que l'obstruction se présente déjà pour des applications lisses, et qu'une singularité robuste n'est pas nécessaire, contrairement à la construction de l'Exemple 3.11.

## 7.2 Énergie d'extension et borne inférieure fondamentale

Nous commençons par introduire la notion fondamentale dans l'étude des obstructions analytiques : l'énergie d'extension.

**Définition 7.2.** Soit  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^{m-1}; \mathcal{N})$ . On définit l'énergie d'extension de  $u$  par

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1)} |\nabla U|^p dx : U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1); \mathcal{N}) \text{ et } \text{tr } U = u \right\}.$$

Par définition, il est clair que  $u$  s'étend à  $\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1)$  au sens de la trace si et seulement si  $\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u) < +\infty$ . L'énergie d'extension peut être pensée comme une version quantitative de la propriété d'extension  $W^{1,p}$ .

Une autre énergie importante est l'énergie topologique. Afin de la définir, nous avons besoin d'une notion d'homotopie plus forte que celle introduite par la Définition 2.12.

**Définition 7.3.** Soient  $u, v \in C^0(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  telles que  $u = v$  sur  $\partial\mathbb{B}^\ell = \mathbb{S}^{\ell-1}$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont homotopes à extrémités fixes, et on note  $u \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} v$ , lorsqu'il existe une homotopie  $H: \mathbb{B}^\ell \times [0,1] \rightarrow \mathcal{N}$  de  $u$  à  $v$  telle que  $H(x,t) = u(x) = v(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^{\ell-1}$  et pour tout  $t \in [0,1]$ .

En guise d'illustration, nous proposons l'exemple suivant, qui établit un lien entre cette notion d'homotopie à extrémités fixes et l'homotopie classique pour des fonctions définies sur la sphère. Nous développons cet exemple de façon intuitive, sans entrer dans les détails.

**Exemple 7.4.** Dans cet exemple, nous établissons une caractérisation des groupes d'homotopie de  $\mathcal{N}$ . Plus précisément, nous montrons que pour tout  $b \in \mathcal{N}$ ,

$$\pi_\ell(\mathcal{N}) \cong \{f \in C^0(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N}) : f = b \text{ sur } \mathbb{S}^{\ell-1}\} / \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} .$$

Nous partons de l'observation que la sphère  $\mathbb{S}^\ell$  et la boule  $\mathbb{B}^\ell$  dont on identifie tous les points situés sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$  sont homéomorphes. Soient  $u, v \in C^0(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  homotopes à extrémités fixes telles que  $u = b = v$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$ . Grâce à cette dernière condition, ces deux applications se transportent en deux applications  $\bar{u}, \bar{v} \in C^0(\mathbb{S}^\ell; \mathcal{N})$ , et il est aisé de vérifier que  $\bar{u} \sim \bar{v}$  en transportant l'homotopie à extrémités fixes entre  $u$  et  $v$ .

Inversement, soient  $u, v \in C^0(\mathbb{S}^\ell; \mathcal{N})$  homotopes. Ces deux applications se transportent en  $\bar{u}, \bar{v} \in C^0(B_{1/2}; \mathcal{N})$  constantes sur  $\partial B_{1/2}$ . L'homotopie  $H$  entre  $u$  et  $v$  se transporte en une homotopie  $\bar{H}$  entre  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  telle que  $\bar{H}(\cdot, t)$  est constante sur  $\partial B_{1/2}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , mais ceci ne suffit pas à obtenir une homotopie à extrémités fixes car la constante peut dépendre de  $t$ . Pour remédier à cela, il suffit d'employer la connexité de  $\mathcal{N}$  pour étendre  $\bar{H}$  de façon radiale en une application continue sur  $\mathbb{B}^\ell \times [0, 1]$  constamment égale à  $b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1} \times [0, 1]$ , ce qui fournit une homotopie à extrémités fixes entre les extensions de  $u$  et  $v$  correspondantes.

Ce raisonnement nous permet d'établir une correspondance univoque entre les classes d'homotopie d'applications  $C^0(\mathbb{S}^\ell; \mathcal{N})$  et les classes d'homotopie à extrémités fixes d'applications  $C^0(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  constamment égales à  $b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$ , ce qui achève la preuve de notre affirmation.

L'énergie topologique d'une application est l'infimum de l'énergie parmi la classe d'homotopie à extrémités fixes de l'application en question.

**Définition 7.5.** Supposons que  $p > \ell + 1$ , et soit  $u \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$ . On définit l'énergie topologique de  $u$  par

$$\mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla v|^p dx : v \in W^{1,p}(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N}) \text{ et } u \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} v \right\}.$$

Notons que, comme  $p > \ell + 1 > \ell$  et  $p(1 - \frac{1}{p}) = p - 1 > \ell$ , l'injection de Morrey-Sobolev assure que  $u$  et  $v$  ci-haut sont dans  $C^0(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$ , ce qui permet de donner un sens à  $u \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} v$ .

La motivation pour introduire l'énergie topologique provient de la *borne inférieure fondamentale* suivante.

**Lemme 7.6.** *Supposons que  $p > \ell + 1$ , et soient  $0 < \rho < 1$  et  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  telle que  $u(x) = b \in \mathcal{N}$  pour tout  $x \in \mathbb{B}^\ell$  tel que  $\rho \leq |x| \leq 1$ . Nous avons*

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u) \geq C \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u),$$

où  $C > 0$  ne dépend pas de  $u$ .

*Démonstration.* Soit  $U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^\ell \times (0, 1); \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } U = u$ . On note  $\mathbb{S}_+^\ell = \mathbb{S}^\ell \cap \mathbb{R}_+^{\ell+1}$ , et on définit

$$S_{+,r} = \{x \in \mathbb{R}^{\ell+1} : |x| = r \text{ et } x_{\ell+1} > 0\}.$$

On se donne un homéomorphisme bilipschitzien  $\Psi: \overline{\mathbb{S}_+^\ell} \rightarrow \overline{\mathbb{B}^\ell}$  qui laisse invariant  $\mathbb{S}^{\ell-1} \times \{0\}$ . On pourra construire un tel homéomorphisme à l'aide de la projection stéréographique depuis le pôle sud, par exemple.

On pose  $U^r(x) = U(r\Psi^{-1}(x))$  pour tout  $x \in \overline{\mathbb{B}^\ell}$ . Puisque  $p > \ell + 1$ , en vertu de l'injection de Morrey-Sobolev, nous avons  $U \in C^0(\overline{\mathbb{B}^\ell \times (0, 1)}; \mathcal{N})$ , et donc  $U^r \in C^0(\overline{\mathbb{B}^\ell}; \mathcal{N})$ . L'hypothèse  $u(x) = b \in \mathcal{N}$  pour tout  $x \in \mathbb{B}^\ell$  tel que  $\rho \leq |x| \leq 1$  assure que  $U^r \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} U^{r'}$  pour tout  $\rho \leq r, r' \leq 1$ . En effet, il suffit de suivre l'homotopie  $U^{(1-t)r+tr'}$ . Ensuite,  $U^1 \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} u$  via l'homotopie

$$H(x, t) = U((1-t)\Psi^{-1}(x) + t(x, 0)).$$

Par conséquent,  $U^r \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} u$  pour tout  $\rho \leq r \leq 1$ . Nous en tirons

$$\int_{S_{+,r}} |\nabla U|^p dx \geq C_1 r^{\ell-p} \int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla U^r|^p dx \geq C_1 r^{\ell-p} \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u)$$

pour presque tout  $\rho \leq r \leq 1$ , où nous avons utilisé un argument de généricité pour garantir que  $U^r \in W^{1,p}(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  pour presque tout  $\rho \leq r \leq 1$ .

En intégrant cette estimation de  $\rho$  à 1, et comme  $\bigcup_{\rho \leq r \leq 1} S_{+,r} \subset \mathbb{B}^\ell \times (0, 1)$ , nous obtenons à l'aide de la formule d'intégration radiale

$$\int_{\mathbb{B}^\ell \times (0, 1)} |\nabla U|^p dx \geq C_1 \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u) \int_\rho^1 r^{\ell-p} dr. \quad (7.1)$$

Prendre l'infimum parmi toutes les extensions  $U$  de  $u$  permet de conclure que

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u) \geq C_1 \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u) \int_\rho^1 r^{\ell-p} dr \geq C_2 \mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u)$$

et achève la preuve. □

### 7.3 Applications d'énergie d'extension arbitrairement élevée

Nous abordons à présent la construction d'applications lisses dont l'énergie d'extension croît de façon surlinéaire par rapport à la semi-norme de Gagliardo au bord. Ces fonctions seront les briques de base pour construire l'application promise par le Théorème 7.1. Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Bethuel [4] et à Mironescu et Van Schaftingen [45, Theorem 1.10].

**Lemme 7.7.** *Supposons que  $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$ , et soit  $b \in \mathcal{N}$ . Si  $p > \ell + 1$  et  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  est infini ou si  $p = \ell + 1$  et  $\pi_\ell(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , alors il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{\mathbb{B}^{m-1}}; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } u_n = b$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{B}^{m-1})} > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n)}{|u_n|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{B}^{m-1})}^p} = +\infty.$$

Nous démontrons en détail le cas  $p > \ell + 1$  lorsque  $m = \ell + 1$ , auquel cas  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  est infini.

*Démonstration du Lemme 7.7 lorsque  $p > \ell + 1$  et  $m = \ell + 1$ .* Puisque  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  est infini, en vertu de l'Exemple 7.4, il existe une suite d'applications  $v_n \in C^0(\overline{\mathbb{B}^\ell}; \mathcal{N})$  telles que  $v_n = b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $v_n \not\sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} v_m$  pour  $n \neq m$ . Par un procédé de régularisation, on peut de plus supposer que  $v_n \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^\ell}; \mathcal{N})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par définition de l'énergie topologique, nous pouvons trouver pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  une application  $w_n \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}^\ell}; \mathcal{N})$  telle que  $w_n = b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$ ,  $v_n \sim_{\mathbb{S}^{\ell-1}} w_n$  et

$$\int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla w_n|^p \, dx \leq 2\mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(v_n) = 2\mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(w_n).$$

Nous affirmons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |w_n|_{W^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{B}^\ell)} = +\infty.$$

En effet, si tel n'était pas le cas, l'inégalité de Morrey fractionnaire – voir par exemple [43, Corollary 4] – permettrait de déduire que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $C^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}^\ell}; \mathcal{N})$  pour  $\alpha = 1 - \frac{\ell+1}{p}$ . Les fonctions  $w_n$  étant constamment égales à  $b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$ , cela impliquerait que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée et équi-uniformément continue.

Le théorème d'Arzelà-Ascoli entraînerait alors, après extraction d'une sous-suite, la convergence uniforme des  $w_n$ . Mais alors, pour  $n$  et  $m$  suffisamment grands, en raisonnant comme dans la Proposition 2.14, on trouverait  $w_n \sim_{\mathfrak{S}^{\ell-1}} w_m$ , une contradiction.

Nous définissons

$$u_n(x) = \begin{cases} w_n(2x) & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ b & \text{si } \frac{1}{2} < |x| \leq 1. \end{cases}$$

Avec cette définition, nous avons  $u_n \sim_{\mathfrak{S}^{\ell-1}} w_n \sim_{\mathfrak{S}^{\ell-1}} v_n$ ,

$$\int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla u_n|^p dx \leq C_1 \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)} = +\infty.$$

Le Lemme 7.6 assure que

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n) \geq C_2 \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u_n) \geq C_3 \int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla u_n|^p dx.$$

Nous invoquons l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire – Proposition 3.10 – ainsi que le fait que  $\mathcal{N}$  est compacte pour écrire

$$|u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p \leq C_4 \left( \int_{\mathbb{B}^\ell} |\nabla u_n|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

(Pour être précis, l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fournit une estimation de la norme  $W^{1-\frac{1}{p},p}$  par la norme  $W^{1,p}$  et la norme  $L^\infty$ . Mais comme  $u_n = b$  au bord, une inégalité de Poincaré permet d'obtenir une estimation faisant uniquement intervenir la norme  $L^p$  de  $\nabla u_n$  ainsi que la norme  $L^\infty$ .) Nous en déduisons que

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n) \geq C_5 \left( |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p \right)^{\frac{p}{p-1}}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)} = +\infty,$$

la conclusion suit. Remarquons que les fonctions  $u_n$  construites sont uniquement lipschitziennes, mais un argument de régularisation permet de les remplacer par des applications lisses vérifiant la même conclusion.  $\square$

La démonstration du cas  $p > \ell + 1$  et  $m > \ell + 1$  repose sur le cas que nous venons de traiter en utilisant un argument de réduction de dimension, que nous nous contentons d'esquisser. L'idée consiste à définir  $f_n(y, z) = u_n(y)$  pour  $y \in \mathbb{B}^\ell$  et  $z \in (0, 1)^{m-\ell-1}$ , où  $u_n$  est l'application construite pour le cas  $m = \ell + 1$ . On peut vérifier, à l'aide du théorème de Tonelli, que  $f_n$  jouit de toutes les propriétés désirées à l'exception de  $\text{tr } f_n = b$ . Cette difficulté est surmontée en remplaçant  $(0, 1)^{m-\ell-1}$  par une sphère;

voir [45]. Plus précisément, on construit une application  $\Phi \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}^\ell \times \mathbb{S}^{m-\ell-1}; \mathbb{B}^{m-1})$  qui soit un difféomorphisme sur son image  $V$ , on pose  $g_n(y, z) = u_n(y)$  pour  $y \in \mathbb{B}^\ell$  et  $z \in \mathbb{S}^{m-\ell-1}$ , et on définit

$$h_n(x) = \begin{cases} g_n(\Phi^{-1}(x)) & \text{si } x \in V, \\ b & \text{si } x \in \overline{\mathbb{B}}^{m-1} \setminus V. \end{cases}$$

On peut montrer que la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède les propriétés souhaitées.

*Démonstration du Lemme 7.7 lorsque  $p = \ell + 1$ .* De la même façon, pour traiter le cas  $p = \ell + 1$ , il suffit de considérer le cas  $m = \ell + 1$  puis de raisonner par réduction de dimension. Comme nous savons uniquement que  $\pi_\ell(\mathcal{N}) \neq \{0\}$ , nous pouvons seulement obtenir une application  $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{B}}^\ell; \mathcal{N})$  telle que  $v = b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$  et  $v \not\equiv_{\mathbb{S}^{\ell-1}} b$ .

En utilisant un argument dans l'esprit de la théorie VMO, nous pouvons obtenir un analogue de l'équation (7.1) dans le cas critique  $p = \ell + 1$ , où les extensions de  $u$  ne sont pas nécessairement continues. Plus précisément, on peut montrer que

$$\int_{\mathbb{B}_\rho^{\ell+1}} |\nabla U|^p dx \geq C \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u) \int_\rho^1 r^{-1} dr = C \mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(u) \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (7.2)$$

si  $u$  est lipschitzienne avec  $u(x) = b$  pour  $\rho \leq |x| \leq 1$  et si  $U$  est une extension  $W^{1,p}$  de  $u$ , où  $C$  ne dépend pas de  $u$  et de  $\rho$ .

Nous souhaitons simplement mettre en avant l'argument clé qui permet d'obtenir la conclusion du Lemme 7.7 dans le cas  $p = \ell + 1$  avec une seule application  $v$  comme ci-haut plutôt qu'une suite entière. Le raisonnement repose sur un changement d'échelle. On suppose  $v$  définie sur  $\mathbb{R}^\ell$  tout entier en étendant par  $b$  en dehors de  $\mathbb{B}^\ell$ , et on définit

$$u_\rho(x) = \begin{cases} v\left(\frac{x}{\rho}\right) & \text{si } |x| \leq \rho, \\ b & \text{si } |x| > \rho. \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} |u_\rho|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p &= \int_{\mathbb{B}^\ell} \int_{\mathbb{B}^\ell} \frac{|u_\rho(x) - u_\rho(y)|^p}{|x - y|^{\ell+p-1}} dx dy \\ &= \rho^{\ell-p+1} \int_{\rho^{-1}\mathbb{B}^\ell} \int_{\rho^{-1}\mathbb{B}^\ell} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{\ell+p-1}} dx dy \leq \rho^{\ell-p+1} \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{\ell+p-1}} dx dy. \end{aligned}$$

Nous utilisons ici l'hypothèse  $p = \ell + 1$ , qui entraîne que  $\rho^{\ell-p+1} = 1$ . Nous trouvons donc

$$|u_\rho|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^\ell} \int_{\mathbb{R}^\ell} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{\ell+p-1}} dx dy = C_1$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |u_\rho|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p = C_1 > 0.$$

On peut montrer que  $\mathcal{E}_{\text{top}}^{1,p}(v) > 0$ . En effet, si tel n'était pas le cas, en utilisant l'inégalité de Morrey, on trouverait une suite de fonctions  $v_n \in W^{1,p}(\mathbb{B}^\ell; \mathcal{N})$  telle que  $v_n$  est homotope à  $v$  à extrémités fixes – en particulier  $v_n = b$  sur  $\mathbb{S}^{\ell-1}$  – et  $v_n \rightarrow b$  uniformément. Ceci contredirait le fait que  $v$  n'est pas homotope à  $b$  à extrémités fixes.

En utilisant cela et l'identité (7.2), nous trouvons

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_\rho) \geq C_2 |u_\rho|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^\ell)}^p \ln\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Puisque  $\ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\rho \rightarrow 0$ , nous obtenons une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possédant toutes les propriétés souhaitées en posant  $u_n = u_{\rho_n}$  avec  $\rho_n \rightarrow 0$  – après régularisation, comme précédemment.  $\square$

## 7.4 Démonstration du Théorème 7.1

Nous procédons finalement à la démonstration du Théorème 7.1. L'idée clé consiste à recoller les applications fournies par le Lemme 7.7 sur des boules disjointes, après une mise à l'échelle adéquate.

*Démonstration du Théorème 7.1.* En utilisant le Lemme 7.7, après une extension par  $b$  en dehors de  $\mathbb{B}^{m-1}$ , on obtient une suite de fonctions  $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{m-1}; \mathcal{N})$  telles que  $u_n = b$  sur  $\mathbb{R}^{m-1} \setminus \mathbb{B}^{m-1}$ ,

$$|u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{m-1})}^p \geq C_1 > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n|_{\mathbb{B}^{m-1}}) \geq 2^n |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{m-1})}^p.$$

On définit une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la condition

$$r_n^{m-p} \mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n|_{\mathbb{B}^{m-1}}) = 1.$$

Nous observons que  $r_n \leq C_3 2^{-\frac{n}{m-p}}$ , et en particulier,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^{m-1} < \infty.$$

Pour  $\delta > 0$  suffisamment réduit, nous pouvons donc trouver une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $\mathbb{B}^{m-1}$  qui converge vers un point  $a \in \mathbb{S}^{m-2}$  et telle que les boules  $B_{\delta r_n}(a_n)$

sont contenues dans  $\mathbb{B}^{m-1}$  et vérifient  $\overline{B_{\delta r_n}(a_n)} \cap \overline{B_{\delta r_m}(a_m)} = \emptyset$  pour  $n \neq m$ . On définit

$$u(x) = \begin{cases} u_n \left( \frac{x-a_n}{\delta r_n} \right) & \text{si } x \in B_{\delta r_n}(a_n), \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

La condition  $a \in \mathcal{S}^{m-2}$  assure que  $u \in C^\infty(\mathbb{B}^{m-1}; \mathcal{N})$ .

La propriété de recollement dénombrable pour les applications de Sobolev fractionnaires – un analogue quantitatif du Lemme 4.5, voir [46, Lemma 2.3] – assure que

$$|u|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^{m-1})}^p \leq C_4 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\delta r_n)^{m-p} |u_n|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^{m-1})}^p \leq C_5 \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^{m-p} 2^{-n} < +\infty.$$

Comme conséquence directe de sa définition, l'énergie d'extension est suradditive, ce qui entraîne que

$$\mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\delta r_n)^{m-p} \mathcal{E}_{\text{ext}}^{1,p}(u_n|_{\mathbb{B}^{m-1}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta^{m-p} = +\infty.$$

Nous avons donc obtenu l'obstruction  $u$  souhaitée, et la preuve est complète.  $\square$

## 7.5 Commentaires et perspectives

### 7.5.1 Bilan du problème de l'extension

En combinant le théorème de Hardt et Lin – Théorème 6.2 – avec les obstructions topologiques – Théorème 3.12 – et analytiques – Théorème 7.1 – nous voyons que la réponse au problème de l'extension dans le cas sous-critique est toujours positive lorsque la variété  $\mathcal{N}$  est  $[p-1]$ -connexe, et toujours négative lorsque  $\pi_{[p-1]}(\mathcal{N}) \neq \{0\}$  ou lorsqu'il existe  $\ell \in \{1, \dots, [p-1]\}$  tel que  $\pi_\ell(\mathcal{N})$  est infini. Nous verrons dans la Section 8.5, à l'aide de résultats de relèvement, que l'hypothèse de  $[p-1]$ -connexité requise par le théorème de Hardt et Lin peut être relaxée en demandant que le premier groupe d'homotopie soit seulement fini plutôt que trivial. Ce qu'il advient dans les cas restants, c'est-à-dire lorsque  $\pi_{[p-1]}(\mathcal{N}) = \{0\}$  et que  $\pi_1(\mathcal{N}), \dots, \pi_{[p-2]}(\mathcal{N})$  sont finis mais que  $\pi_\ell(\mathcal{N}) \neq \{0\}$  pour au moins un  $\ell \in \{2, \dots, [p-2]\}$ , est *complètement ouvert*.

## 7.5.2 Obstructions analytiques à l'approximation : quand la variété cible n'est plus compacte

Nous avons annoncé en début de chapitre que les obstructions de nature analytique ne surgissent que pour les problèmes d'extension et de relèvement, et non pour l'approximation. Cela est vrai *dans le cas où  $\mathcal{N}$  est compacte*. Dans le cas où  $\mathcal{N}$  n'est pas compacte, la technique de l'obstruction analytique trouve son utilité. Cela nous fournit une occasion d'évoquer cette variante du problème de l'approximation. Nous n'entrons pas dans les détails de ce cadre de travail, mais nous le mentionnons brièvement pour la curiosité du lecteur intéressé.

Le problème de l'approximation quand  $\mathcal{N}$  n'est pas compacte fut étudié par Bousquet, Ponce et Van Schaftingen dans [14] et [15]. Dans [14], ils mirent en évidence une nouvelle propriété sur  $\mathcal{N}$ , appelée *trimming property*, qui joue un rôle pour la densité de  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  lorsque  $p \in \mathbb{N}_*$ . Lorsque  $\mathcal{N}$  ne satisfait pas cette propriété,  $C^\infty(\overline{Q}; \mathcal{N})$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(Q; \mathcal{N})$  pour  $p$  entier.

Le contre-exemple à la densité forte fourni dans [14] présente une seule singularité robuste, et on peut vérifier qu'il peut être approché au sens *faible* par des fonctions lisses. Pour mettre en défaut la densité faible, il convient de construire une application comportant une infinité de singularités. C'est ici que la méthode d'obstruction analytique que nous avons présentée intervient. En l'absence de la propriété de *trimming*, on peut montrer à l'aide d'une série de lemmes techniques qu'il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{B}^p; \mathcal{N})$  telle que  $\int_{\mathbb{B}^p} |\nabla u_n|^p dx \leq 2^{-n}$  mais

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}^p} |\nabla v_j|^p dx \geq C 2^n \int_{\mathbb{B}^p} |\nabla u_n|^p dx$$

pour toute suite  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathcal{N})$  qui converge faiblement vers  $u_n$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , où  $C > 0$  ne dépend pas de  $n$ . On peut de plus prendre les  $u_n$  constamment égales à  $b$  sur  $\mathbb{B}^p \setminus B_{1/2}$  pour un  $b \in \mathcal{N}$  fixé. L'idée consiste alors à recoller ensemble les  $u_n$  convenablement mises à l'échelle, dans l'esprit des constructions que nous avons effectuées dans ce chapitre. Ceci fournit une application  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$  qui ne peut être approchée au sens faible par des fonctions lisses sur  $\overline{\Omega}$  lorsque  $m = p$ . Mentionnons qu'on utilise de façon clé l'invariance de la norme  $L^p$  du gradient lorsque  $p = m$ ; voir la démonstration du Lemme 7.7 pour un raisonnement analogue.

Le cas général  $1 \leq p \leq m$  avec  $p \in \mathbb{N}$  suit ensuite du cas  $p = m$  par un argument de réduction de dimension. On obtient alors que la propriété de *trimming* est également nécessaire pour l'approximation au sens faible lorsque  $\mathcal{N}$  n'est pas compacte et  $1 \leq p \leq m$  est entier; voir [15, Theorem 3].

### 7.5.3 Obstructions analytiques au relèvement

Tout comme le problème de l'extension, le problème du relèvement est sujet aux obstructions de nature analytique. Celles-ci surgissent lorsque  $0 < s < 1$  et  $1 \leq sp < m$ , et sont causées par des applications  $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  telles que  $\tilde{u} \notin W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  mais  $u = \pi \circ \tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . Le prototype pour de telles obstructions analytiques est dû à Bourgain, Brezis et Mironescu [9, Lemma 5] dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est revêtu par  $\mathbb{R}$  via l'application exponentielle, et est expliqué dans l'exemple suivant.

**Exemple 7.8.** On suppose sans perte de généralité que  $0 \in \Omega$ . Définissons

$$\tilde{u}(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{m-sp}{p} \leq \alpha < \frac{m-sp}{sp}.$$

Nous avons vu dans l'Exemple 3.4 que  $\tilde{u} \notin W^{s,p}(\Omega)$ . D'autre part, nous avons  $u = e^{i\tilde{u}} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . En outre, nous observons que  $|\nabla u(x)| \leq \alpha|x|^{-\alpha-1}$ . Puisque  $sp(\alpha+1) < m$ , nous pouvons trouver  $1 \leq sp < q$  tel que  $q(\alpha+1) < m$ , et nous avons donc  $\nabla u \in L^q(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg assure que  $u \in W^{s, \frac{q}{s}}(\Omega; \mathbb{S}^1) \subset W^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . (Notons que nous avons dû utiliser l'exposant intermédiaire  $q$  pour nous assurer que nous appliquions l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg à un exposant strictement supérieur à 1. Si  $sp > 1$ , on peut directement choisir  $q = sp$ .)

Observons de plus que  $u \in H^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . En effet, par le même calcul que ci-haut, on montre que  $\tilde{u} \in W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R})$ . Nous pouvons alors invoquer le théorème de densité classique pour approcher  $\tilde{u}$  dans  $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{R})$  par une suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions  $C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ . Nous posons  $u_n = e^{i\tilde{u}_n} \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{S}^1)$ , et nous avons donc  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,q}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . Comme  $\|u_n - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire permet de conclure que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ .

Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur ce type de constructions dans le chapitre suivant afin d'obtenir des obstructions générales au relèvement dans la gamme  $0 < s < 1$  et  $1 \leq sp < m$ , mais avant d'aborder le Chapitre 8 qui explore davantage en profondeur le problème du relèvement, nous concluons en mentionnant déjà le résultat suivant, dont la preuve est dans l'esprit de la construction que nous avons effectuée pour l'extension.

**Théorème 7.9.** *Supposons que  $m \geq 2$ ,  $0 < s < 1$  et  $sp = 1$ . Pour tout  $a \in \overline{\Omega}$ , il existe  $u : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  telle que*

- (a)  $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{a\}; \mathcal{N}) \cap W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ ;
- (b)  $u \in H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ ;
- (c)  $u$  ne se relève pas en une application  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ .

Ce résultat est dû à Mironescu et Van Schaftingen [44]. Il assure que lorsque  $0 < s < 1$  et  $sp = 1$ , des obstructions analytiques surgissent même en l'absence d'obstructions topologiques. En effet, comme le suggèrent l'Exemple 2.15 et la discussion à la fin de la Section 5.6, la classe  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  exclut les singularités topologiques. Plus précisément, les applications dans  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  ne peuvent présenter de singularité topologique robuste en dimension  $[sp]$ , le cas modèle étant la fonction  $u: \mathbb{B}^{[sp]+1} \rightarrow \mathbb{S}^{[sp]}$  définie par  $u(x) = \frac{x}{|x|}$ , dont la restriction au bord d'une boule contenant l'origine ne s'étend pas continûment à la boule tout entière. Le Théorème 7.9 stipule donc qu'il existe des applications ne présentant pas de telles singularités topologiques mais qui ne peuvent malgré tout pas être relevées. La construction de l'application en question révèle que l'obstruction au relèvement est bien de nature analytique. En effet, on construit une application  $u: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$  avec  $\tilde{u}: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ , et on fait en sorte que  $\tilde{u}$  oscille bien plus fortement que  $u$  par rapport à la norme  $W^{s,p}$ .

La démonstration repose sur un principe similaire à la construction que nous avons présentée pour l'extension, en recollant une infinité d'obstructions convenablement mises à l'échelle. Un ingrédient supplémentaire dans le cadre du relèvement consiste à choisir une obstruction autour de chaque point dans la fibre d'un  $b \in \mathcal{N}$ , afin de saturer tous les emplacements disponibles pour relever  $u$ . Nous aurons l'occasion de revenir plus en détail sur cette technique dans la preuve du Théorème 8.15.

# Chapitre 8

## Relèvement dans le cas sous-critique

Dans ce chapitre, nous explorons le paysage de la théorie du relèvement lorsque  $sp \leq m$ . Nous commençons par étudier le cas où  $s = 1$ , où la réponse est toujours positive dès que  $p \geq 2$ , indépendamment de la dimension – tandis que le cas  $1 \leq p < 2$  se heurte à l’obstruction topologique, comme annoncé dans la Section 4.3. La preuve repose sur un argument technique initialement développé par Bethuel et Zheng, que nous présentons de façon complète et détaillée.

Ce cas particulier nous ouvrira la voie vers le cas général. À l’aide d’une méthode d’amélioration de la régularité, nous donnerons une réponse positive lorsque  $s > 1$  dans la gamme  $sp \geq 2$ . Nous traiterons également le cas critique  $sp = m$  pour toutes valeurs de  $s$  en utilisant un résultat d’extension, ce qui sera l’occasion d’évoquer un lien explicite entre deux des problèmes traités dans ce mémoire.

Enfin, nous étudierons le cas  $0 < s < 1$ , pour lequel nous nous limiterons à la gamme  $sp \geq 2$ . Le cas  $1 \leq sp < 2$  se heurtant à l’obstruction topologique, le seul cas que nous laisserons ainsi de côté concerne la gamme  $sp < 1$ , où la réponse au problème du relèvement est toujours positive, comme nous l’expliquerons brièvement dans les commentaires en fin de chapitre. Lorsque  $0 < s < 1$ , la réponse au problème du relèvement dépend de la compacité du revêtement. Si  $\tilde{N}$  est compacte, alors la condition  $sp \geq 2$  est à nouveau suffisante pour garantir l’existence du relèvement, comme dans tous les cas qui précèdent. Ce résultat est une conséquence d’une jolie inégalité d’oscillation en dimension 1, qui n’a *a priori* rien à voir avec la théorie des applications à valeurs variétés. En revanche, lorsque  $\tilde{N}$  est non compacte, de nouvelles obstructions surgissent, et la réponse au problème du relèvement est négative dans toute la gamme  $1 \leq sp < m$ . Ces obstructions sont cette fois de nature analytique. Nous avons déjà mentionné le cas modèle sur lequel elles sont construites dans les commentaires à la fin du Chapitre 7, qui remonte aux travaux de Bourgain, Brezis et Mironescu concernant le cercle revêtu par l’application exponentielle. La méthode fut ensuite étendue au cas d’un revêtement universel arbitraire par Bethuel et Chiron. Dans ce mémoire, nous adaptons leur argument pour couvrir le cas général d’un revêtement quelconque, en nous inspirant des techniques de construction d’obstructions analytiques présentées dans le Chapitre 7.

Enfin, le chapitre se clôturera sur un autre lien entre l'extension et le relèvement. Nous montrerons comment les résultats de relèvement que nous avons obtenus peuvent à leur tour être utilisés pour obtenir un résultat d'extension, permettant de relaxer les hypothèses du Théorème 6.2.

## 8.1 Le cas $s = 1$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant. On considère un revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  entre variétés connexes non vides avec  $\mathcal{N}$  compacte, et on suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  est simplement connexe, comme à chaque fois que nous traitons du problème du relèvement.

**Théorème 8.1.** *Supposons que  $2 \leq p < +\infty$ . Pour toute  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Ce théorème fut établi par Bethuel et Zheng [8, Lemma 1] dans le cas où  $m = 3$ ,  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  et  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est le revêtement universel de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$ , avec pour objectif une application au problème de l'approximation. Une preuve alternative fut ensuite proposée par Bourgain, Brezis et Mironescu [9], toujours dans le cas où  $\mathcal{N}$  est le cercle muni de son revêtement universel. Le Théorème 8.1 fut finalement énoncé en toute généralité par Bethuel et Chiron [6, Theorem 1], qui utilisèrent la même technique de preuve que Bethuel et Zheng. (Pour être précis, Bethuel et Chiron considèrent uniquement le cas où  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est le revêtement universel de  $\mathcal{N}$ , mais leur approche fonctionne pour un revêtement arbitraire.) Combiné au Théorème 4.7, ce résultat *résout complètement* le problème du relèvement pour  $s = 1$ .

Le reste de cette section est dédié à la démonstration du Théorème 8.1 dans le cas où  $\Omega = (0, 1)^m$ . La preuve de Bethuel et Chiron, tout comme celle de Bethuel et Zheng dont elle s'inspire, passe sous silence certaines difficultés, notamment liées à des questions de mesurabilité. La présentation de Van Schaftingen [56, Section 6.1] met l'accent sur l'importance de ces considérations, mais laisse certains détails en exercice. Notre ambition est de présenter un argument complet et de fournir les détails permettant de traiter ces difficultés. La démonstration étant relativement longue, nous la séparons en étapes pour le confort du lecteur.

*Démonstration du Théorème 8.1 lorsque  $\Omega = (0, 1)^m$ .* La preuve emploie une récurrence sur  $m$ .

*Étape 1 : initialisation : le cas  $m = 1$ .* Lorsque  $m = 1$ , le Théorème 8.1 est valide pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , sans la restriction  $p \geq 2$ . Il suffit d'observer qu'en dimension 1, l'injection de Morrey-Sobolev tient pour tout  $p \geq 1$ . La théorie du cas surcritique – voir Proposition 4.3 – s'applique donc jusqu'au cas critique  $p = 1$  et fournit directement le relèvement souhaité.

Nous supposons à présent que  $m \geq 2$  et que le résultat tient pour  $m - 1$ , et nous le montrons pour  $m$ .

*Étape 2 : relèvement au bord de  $\Omega$ .* Nous notons  $\partial_- \Omega = \bigcup_{k=1}^m (0, 1)^{k-1} \times \{0\} \times (0, 1)^{m-k} \subset \partial \Omega$ .

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $u \in W^{1,p}(\partial_- \Omega; \mathcal{N})$ . En effet, un argument de généricité permet de trouver  $x \in \Omega$  tel que  $u \in W^{1,p}\left(\bigcup_{k=1}^m (0, 1)^{k-1} \times \{x_k\} \times (0, 1)^{m-k}; \mathcal{N}\right)$ , et cela découpe  $\Omega$  en  $2m$  cubes sur lesquels nous nous trouvons dans la situation précédemment décrite. Il suffit alors de travailler sur chacun de ces cubes, et de recoller les constructions obtenues à la fin de la démonstration (on pourra vérifier que ces constructions coïncident au sens de la trace sur le bord des cubes). En transportant  $\partial_- \Omega$  sur  $(0, 1)^{m-1}$  via une transformation bilipschitzienne, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence pour relever  $u|_{\partial_- \Omega}$  en une application  $\tilde{g} \in W^{1,p}(\partial_- \Omega; \mathcal{N})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{g}$  sur  $\partial_- \Omega$ .

*Étape 3 : relèvement dans le long de segments dans chacune des directions de coordonnées.* Pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ , nous allons construire une application  $\tilde{u}_k: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}_k$  presque partout sur  $\Omega$ . Nous notons  $\partial_k \Omega = (0, 1)^{k-1} \times \{0\} \times (0, 1)^{m-k} \subset \partial_- \Omega$ , et pour  $x = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \partial_k \Omega$ , nous posons  $P_x = \{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) : x_k \in [0, 1]\}$ .

*Affirmation.* Il existe un ensemble négligeable  $E_k \subset \Omega$  et une fonction  $v_k: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  tels que  $u = v_k$  sur  $\Omega \setminus E_k$  et  $v_k|_{P_x}$  est continue pour tout  $x \in \partial_k \Omega$ .

*Démonstration de l'affirmation.* Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions lisses telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$ . Quitte à passer à une sous-suite, par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée et un argument de généricité, nous avons  $u_n \rightarrow u$  presque partout sur  $\Omega$  et  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(P_x; \mathbb{R}^v)$  pour presque tout  $x \in \partial_k \Omega$ . L'injection de Morrey-Sobolev en dimension 1 assure que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans la norme uniforme sur  $P_x$  pour presque tout  $x \in \partial_k \Omega$ , et converge donc uniformément vers une fonction continue sur  $P_x$ . On définit  $v_k$  sur chaque  $P_x$  comme la limite uniforme de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  – et  $v_k = b \in \mathcal{N}$  sur les  $P_x$  où la convergence uniforme échoue. En chaque  $y \in \Omega$  tel que  $u_n(y) \rightarrow u(y)$  et tel que  $y \in P_x$  pour un  $P_x$  où a lieu la convergence uniforme de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nous avons  $u(y) = v_k(y)$ , et la conclusion suit.  $\square$

Notons qu'il ne suffit pas d'appliquer l'injection de Morrey-Sobolev sur presque tout  $P_x$ . En effet, ceci permet uniquement de déduire que  $u$  coïncide presque partout sur  $P_x$  avec une fonction continue sur  $P_x$ . Nous nous retrouvons alors à prendre une union non dénombrable d'ensembles négligeables, qui n'a aucune raison de rester négligeable.

Observons que  $\text{tr}_{\partial_k \Omega} u = \text{tr}_{\partial_k \Omega} v_k = v_k|_{\partial_k \Omega}$  presque partout. En effet, par un argument de généricité, il existe une suite  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de réels strictement compris entre 0 et 1 telle

que  $\lambda_j \rightarrow 0$  et  $\text{tr}_{\partial_k \Omega} v_k(\cdot + \lambda_j e_k) = v_k(\cdot + \lambda_j e_k)|_{\partial_k \Omega}$ . Or,  $v_k(\cdot + \lambda_j e_k) \rightarrow v_k$  dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^v)$  et  $v_k(\cdot + \lambda_j e_k)|_{\partial_k \Omega} \rightarrow v_k|_{\partial_k \Omega}$  ponctuellement sur  $\partial_k \Omega$  du fait de la continuité de  $v$  sur chaque  $P_x$ . La continuité de la trace permet de conclure.

Nous utilisons le théorème du relèvement pour les applications continues sur chaque  $P_x$  pour définir  $\tilde{u}_k: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $\tilde{u}_k$  est continue sur chaque  $P_x$ ,  $v_k = \pi \circ \tilde{u}_k$  sur  $\Omega$  et  $\tilde{u}_k = \tilde{g}$  sur  $\partial_k \Omega$ . De plus, pour presque tout  $x \in \partial_k \Omega$ , nous savons que  $\tilde{u}_k$  admet une dérivée faible dans la direction  $e_k$  sur  $P_x$ , vérifiant  $|\partial_k \tilde{u}_k| = |\partial_k v_k|$  car  $\partial_k \tilde{u}_k$  est calculée localement comme la dérivée de la composée  $\pi^{-1} \circ v_k$ .

*Étape 4 :  $\tilde{u}_k$  est mesurable.* La mesurabilité de  $\tilde{u}_k$  est une étape technique et requiert une justification. En effet,  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur chaque  $P_x$  car elle y est continue, mais  $\Omega$  s'écrit comme l'union *non dénombrable* des  $P_x$ . Nous fournissons ici un argument détaillé. Plus précisément, nous prouvons l'affirmation suivante.

*Affirmation.* Soient  $v_k: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  et  $\tilde{u}_k: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telles que  $v_k = \pi \circ \tilde{u}_k$ . Supposons que  $v_k$  est mesurable sur  $\Omega$  et continue sur  $P_x$  pour tout  $x \in \partial_k \Omega$ , et que  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\partial_k \Omega$  et continue sur  $P_x$  pour tout  $x \in \partial_k \Omega$ . Alors  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\Omega$ .

L'idée est la suivante. Tant que  $v_k$  prend ses valeurs dans un ouvert de  $\mathcal{N}$  au-dessus duquel  $\pi$  est trivial, nous pouvons écrire  $\tilde{u}_k = \pi^{-1} \circ v_k$ , et déduire la mesurabilité de  $\tilde{u}_k$  de celle de  $v_k$  par composition avec une application continue. Le point délicat est d'écrire  $\Omega$  comme une union dénombrable de sous-ensembles mesurables sur lesquels  $v_k$  prend ses valeurs dans un ouvert de  $\mathcal{N}$  au-dessus duquel le revêtement est trivial, ce que nous faisons en utilisant la continuité uniforme de  $v_k$  sur chaque  $P_x$  pour contrôler son oscillation.

*Démonstration de l'affirmation.* La compacité de  $\mathcal{N}$  assure l'existence de  $\delta > 0$  et d'une famille finie de points  $\{a_j\}_{j \in J}$  tels que  $\pi$  est trivial au-dessus de  $B_{2\delta}(a_j) \cap \mathcal{N}$  et  $\mathcal{N} \subset \bigcup_{j \in J} B_\delta(a_j)$ .

Nous souhaitons à présent contrôler l'oscillation de  $v_k$  de façon mesurable. Pour tout  $t \in [0, 1]$ , la fonction définie par  $v_{t,k}(x) = v_k(x + t e_k)$  est mesurable en tant que section d'une application mesurable. On pose

$$\omega_{\eta, v_k}(x) = \sup_{\substack{t, s \in [0, 1] \\ |t-s| \leq \eta}} |v_{t,k}(x) - v_{s,k}(x)|,$$

ce qui définit une fonction mesurable pour tout  $\eta > 0$  en tant que supremum de fonctions mesurables. (Notons qu'on peut restreindre le supremum sur les  $t$  et  $s$  rationnels par continuité de  $v_k$  sur  $P_x$ , afin de prendre un supremum dénombrable d'applications mesurables.) Comme  $v_k$  est uniformément continue sur chaque  $P_x$ , nous avons  $\omega_{\eta, v_k}(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in \partial_k \Omega$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . Par conséquent, nous pouvons décomposer  $\partial_k \Omega = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} U_{k,l}$ , où  $U_{k,l} = \{x \in \partial_k \Omega : \omega_{2^{-l}, v_k}(x) \leq \delta\}$  est mesurable pour tout  $l \in \mathbb{N}$ .

Pour  $j \in J$  fixé, nous écrivons  $\pi^{-1}(B_{2\delta}(a_j) \cap \mathcal{N}) = \bigcup_{i \in I_j} V_{i,j}$ , où  $I_j$  est un ensemble d'indices

au plus dénombrable et où les  $V_{i,j}$  sont des ouverts de  $\tilde{\mathcal{N}}$  disjoints et homéomorphes à  $B_{2\delta}(a_j) \cap \mathcal{N}$  via  $\pi$ . Pour  $l \in \mathbb{N}$ ,  $j \in J$  et  $i \in I_j$ , nous définissons

$$U_{k,l,j,i} = \{x \in \partial_k \Omega : x \in U_{k,l}, v_k(x) \in B_\delta(a_j) \text{ et } \tilde{u}_k(x) \in V_{i,j}\},$$

qui est mesurable en vertu de la mesurabilité de  $U_{k,l}$ , de  $v_k$  sur  $\Omega$  et de  $\tilde{u}_k$  sur  $\partial_k \Omega$ . Par construction de  $U_{k,l}$ , nous avons  $v_k(x + te_k) \in B_{2\delta}(a_j)$  pour tous  $x \in U_{k,l,j,i}$  et  $0 \leq t \leq 2^{-l}$ , et par conséquent  $\tilde{u}_k(x + te_k) \in V_{i,j}$ . Sur  $\{U_{k,l,j,i} + te_k : t \in [0, 2^{-l}]\}$ , nous avons donc  $\tilde{u}_k = \pi^{-1} \circ v_k$ , ce qui implique que  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur cet ensemble. En répétant itérativement cet argument  $2^l$  fois, on en déduit que  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\{U_{k,l,j,i} + te_k : t \in [0, 1]\}$ . En vertu de la décomposition dénombrable

$$\partial_k \Omega = \bigcup_{l \in \mathbb{N}, j \in J, i \in I_j} U_{k,l,j,i},$$

ceci suffit à conclure que  $\tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\Omega$  et achève la preuve de l'affirmation.  $\square$

Nous vérifions que  $\partial_k \tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\Omega$  de façon analogue. En effet, localement,  $\partial_k \tilde{u}_k$  est calculée comme la dérivée de  $\pi^{-1} \circ v_k$ , qui est mesurable. La décomposition de  $\Omega$  construite dans la preuve qui précède permet de conclure que  $\partial_k \tilde{u}_k$  est mesurable sur  $\Omega$ .

*Étape 5 : régularité de  $\tilde{u}_k$ .* Comme  $\tilde{u}_k$  admet une dérivée faible dans la direction  $e_k$  sur  $P_x$  pour presque tout  $x \in \partial_k \Omega$ , qui est mesurable sur  $\Omega$  et vérifie  $|\partial_k \tilde{u}_k| = |\partial_k v_k|$ , nous en déduisons que  $\tilde{u}_k$  est faiblement dérivable dans la direction  $e_k$  sur  $\Omega$  et  $\partial_k \tilde{u}_k \in L^p(\Omega)$ . Nous en tirons que

$$|\tilde{u}_k(y)|^p \leq \left( |\tilde{u}_k(x)| + \int_0^1 |\partial_k \tilde{u}_k(x_k)| dx_k \right)^p \leq C |\tilde{g}(x)|^p + C \int_{P_x} |\partial_k u|^p dx_k$$

pour presque tout  $x \in \partial_k \Omega$  et tout  $y \in P_x$ . Comme  $\tilde{g} \in W^{1,p}(\partial_k \Omega; \mathcal{N})$ , ceci suffit à déduire que  $\tilde{u}_k \in L^p(\Omega; \mathcal{N})$ .

Finalement, nous vérifions que  $\text{tr}_{\partial_k \Omega} \tilde{u}_k = \tilde{g}$  sur  $\partial_k \Omega$  en utilisant le même argument que pour déterminer la trace de  $v_k$ .

*Étape 6 : les  $\tilde{u}_k$  coïncident sur  $\Omega$ .* À ce stade, nous avons obtenu  $m$  relèvements de  $u$ , chacun dérivable au sens faible dans une direction et appartenant à  $L^p(\Omega)$  de même que sa dérivée faible dans la direction  $e_k$ . Nous allons conclure en montrant que ces  $m$  relèvements coïncident, ce qui fournira un relèvement  $\tilde{u}$  faiblement dérivable dans chacune des  $m$  directions, et appartenant à  $L^p(\Omega)$  de même que toutes ses dérivées faibles.

Pour  $x \in \partial_k \Omega$  et  $x' \in \partial_{k'} \Omega$  avec  $k \neq k'$ , nous notons  $P_{x,x'}$  la portion du plan engendré par  $P_x$  et  $P_{x'}$  contenue dans  $\Omega$ , pour peu que  $P_x$  et  $P_{x'}$  se trouvent dans un plan commun. Pour tout  $y \in \Omega$  tel que  $y \in P_x$  et  $y \in P_{x'}$ , on note  $R_{y,k,k'}$  le rectangle contenu dans  $P_{x,x'}$  dont  $y$  est l'un des sommets et dont les arêtes sont contenues dans  $P_x, P_{x'}, \partial_k \Omega$  et  $\partial_{k'} \Omega$ . Nous utilisons un argument de genericité dans l'esprit des Exemples 1.1 et 1.2 – que nous ne détaillons pas, voir par exemple [56, Lemmas 6.3 and 6.4] – pour construire  $E \subset \Omega$  négligeable tel que pour tout  $y \in \Omega \setminus E$  et pour tous  $k \neq k'$ , nous avons  $u \in W^{1,p}(R_{y,k,k'}; \mathcal{N})$ ,  $u \in W^{1,p}(\partial R_{y,k,k'}; \mathcal{N})$  avec  $\text{tr } u|_{R_{y,k,k'}} = u|_{\partial R_{y,k,k'}}$  et  $\tilde{g} \in W^{1,p}(\partial R_{y,k,k'} \cap \partial_- \Omega; \mathcal{N})$  avec  $u = \pi \circ \tilde{g}$  presque partout sur  $\partial R_{y,k,k'} \cap \partial_- \Omega$ .

Fixons  $y \in \Omega \setminus E$  et  $x \in \partial_k \Omega$ ,  $x' \in \partial_{k'} \Omega$  tels que  $y \in P_x$  et  $y \in P_{x'}$ . En utilisant l'injection de Morrey-Sobolev, le choix de  $E$  implique que  $u|_{\partial R_{y,k,k'}}$  est une application continue possédant une extension  $W^{1,p}$  à  $R_{y,k,k'}$ . Mais alors, en utilisant l'hypothèse  $p \geq 2$  et en raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 3.9, nous déduisons que  $u|_{\partial R_{y,k,k'}}$  possède une extension continue à  $R_{y,k,k'}$ , et est donc homotope à une fonction constante.

Ceci assure l'existence d'un unique relèvement continu de  $u|_{\partial R_{y,k,k'}}$  à travers  $\pi$  coïncidant avec  $\tilde{g}$  sur  $\partial R_{y,k,k'} \cap \partial_- \Omega$ . Par conséquent, ce relèvement doit coïncider avec  $\tilde{u}_k$  sur  $\partial R_{y,k,k'} \cap P_x$  et avec  $\tilde{u}_{k'}$  sur  $\partial R_{y,k,k'} \cap P_{x'}$  pour presque tout  $y$ , montrant que  $\tilde{u}_k(y) = \tilde{u}_{k'}(y)$ . Notons qu'il est nécessaire de se restreindre aux  $y \in \Omega \setminus E$  tels que  $g(x)$  et  $g(x')$  coïncident avec l'application continue fournie par l'injection de Morrey-Sobolev appliquée à  $u|_{\partial R_{y,k,k'}}$ , ce qui se fait en raisonnant comme dans l'Affirmation de l'Étape 3. Ceci montre que  $\tilde{u}_k = \tilde{u}_{k'}$  presque partout sur  $\Omega$  et permet d'achever la preuve.  $\square$

De cette démonstration, nous retiendrons deux éléments. Premièrement, dans le Théorème 8.1, tout se produit en dimensions 1 et 2. En dimension 1, nous avons utilisé l'injection de Morrey-Sobolev et la théorie continue du relèvement pour relever  $u$  le long de presque chaque segment émanant d'une face de  $\Omega$ . En dimension 2, nous avons employé l'injection de  $W^{1,p}$  dans  $C^0$  ou VMO lorsque  $p \geq 2$  et la théorie de l'extension pour déduire que  $u$  est homotope à une constante sur le bord d'un rectangle générique contenu dans  $\Omega$ , et l'unicité du relèvement continu nous a permis d'en déduire que les constructions en dimension 1 que nous avons effectuées dans chaque direction coïncident. Rien ne se produit en dimension supérieure. Ceci explique l'hypothèse  $p \geq 2$ , indépendante de  $m$  et de la topologie de la variété.

Deuxièmement, de toutes les démonstrations qui figurent dans ce travail, celle-ci est sans nul doute celle qui illustre le mieux la prudence dont il faut faire preuve lorsqu'on manipule des applications de Sobolev, principalement lorsqu'on travaille sur des sous-ensembles de  $\Omega$  de dimension inférieure à  $m$ .

Nous concluons cette section en reprenant l'Exemple 4.6, qui ne vérifie pas les hypothèses du Théorème 8.1, afin de voir quelle étape de notre raisonnement échoue.

Nous espérons que cela apportera un certain éclairage sur la démonstration qui précède.

**Exemple 8.2.** Définissons  $u : \Omega = (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  par

$$u(x) = \frac{x - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{|x - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})|}.$$

Nous avons vu dans l'Exemple 4.6 que  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  pour tout  $1 \leq p < 2$  – mais pas pour  $p \geq 2$  – tandis que  $u$  ne se relève pas en une application  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R})$  à travers l'application exponentielle. Supposons fixé un relèvement  $\tilde{g}$  de  $u$  sur  $(0, 1) \times \{0\} \cup \{0\} \times (0, 1)$  de régularité  $W^{1,p}$  – donc en particulier continu en vertu de l'injection de Morrey-Sobolev. Sans perte de généralité, nous choisissons  $\tilde{g}$  tel que  $\tilde{g}((0, 1)) = \frac{3\pi}{4}$  et  $\tilde{g}((1, 0)) = \frac{7\pi}{4}$ . L'application  $u$  est bien continue sur chaque segment vertical et horizontal à l'exception des deux passant par le centre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  de  $\Omega$ , et nous pouvons donc construire les applications  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2$  décrites dans la démonstration du Théorème 8.1.

Cependant,  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2$  ne coïncident pas presque partout sur  $\Omega$ . En fait, elles diffèrent sur l'ensemble du quadrant supérieur droit de  $\Omega$ . Par exemple,  $\tilde{u}_1((\frac{3}{4}, \frac{3}{4})) = \frac{9\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \tilde{u}_2((\frac{3}{4}, \frac{3}{4}))$ . Plus généralement, lorsqu'on suit le bord d'un rectangle  $R_{y,1,2}$  pour  $y$  dans le quadrant supérieur droit de  $\Omega$ , on accomplit un tour complet autour de la singularité de  $u$ , ce qui dans le relèvement se traduit par une translation de  $2\pi$ .

En fait, on observe sans peine que  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) présente une discontinuité de saut au passage du segment vertical (resp. horizontal) passant par  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , ce qui l'empêche d'avoir une dérivée faible  $L^1$  dans la direction horizontale (resp. verticale). On trouvera une illustration des valeurs de  $|u_1|$  et  $|u_2|$  sur la Figure 8.1 qui illustre ce fait.



FIGURE 8.1 – Valeurs de  $|u_1|$  et  $|u_2|$

## 8.2 Vers le cas $s > 1$ : augmenter la régularité

Le Théorème 8.1 s'étend naturellement au cas  $s > 1$ , en remplaçant la condition  $p \geq 2$  par  $sp \geq 2$ . Avant de donner l'énoncé du résultat principal de cette section, nous avons besoin de fournir quelques précisions concernant l'application adjointe à  $D\pi$ .

On note  $(D\pi(\tilde{x}))^*: T_{\pi(\tilde{x})}\mathcal{N} \rightarrow T_{\tilde{x}}\tilde{\mathcal{N}}$  l'application adjointe à  $D\pi(\tilde{x})$  en  $\tilde{x}$  définie entre le plan tangent à  $\mathcal{N}$  au point  $\pi(\tilde{x})$  et le plan tangent à  $\tilde{\mathcal{N}}$  au point  $\tilde{x}$ . Comme  $D\pi(\tilde{x})$  est une isométrie, elle est inversible par son adjointe, qui est également une isométrie. En chaque  $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$  nous pouvons étendre canoniquement  $(D\pi(\tilde{x}))^*$  en une application linéaire  $\mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{v}}$ , toujours notée  $(D\pi(\tilde{x}))^*$ . En effet, puisque  $T_{\pi(\tilde{x})}\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$  et  $T_{\tilde{x}}\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathbb{R}^{\tilde{v}}$ , il suffit de considérer l'extension linéaire s'annulant sur l'orthogonal de  $T_{\pi(\tilde{x})}\mathcal{N}$ . Ceci fournit une fonction  $(D\pi)^*: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^v; \mathbb{R}^{\tilde{v}})$  qui à chaque  $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$  associe l'application linéaire  $(D\pi(\tilde{x}))^*$ , et comme  $\pi$  est une isométrie, l'application  $(D\pi)^*$  est bornée. En outre, comme  $\pi$  est un difféomorphisme local,  $(D\pi)^*$  est lisse.

**Théorème 8.3.** *Supposons que  $s > 1$  et  $sp \geq 2$ . Supposons également que toutes les dérivées de  $(D\pi)^*$  sont bornées. Pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}}) \cap W^{1,sp}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Ce théorème est dû à Bourgain, Brezis et Mironescu [9, Theorem 3] dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est revêtu par  $\mathbb{R}$  via l'application exponentielle, et à Bethuel et Chiron [6, Theorem 2] dans le cas général.

Nous attirons l'attention du lecteur sur l'hypothèse que toutes les dérivées de  $(D\pi)^*$  sont bornées, qui est utilisée de façon implicite dans les références qui précèdent et que nous avons précisée explicitement dans ce mémoire. Comme  $\pi$  est un difféomorphisme local,  $(D\pi(\tilde{x}))^*$  coïncide avec  $D\pi^{-1}(x)$  pour tous  $x \in V_b$  et  $\tilde{x} \in V_{\tilde{b}}$  tels que  $x = \pi(\tilde{x})$ , où  $V_b$  est un voisinage de  $b \in \mathcal{N}$  au-dessus duquel le revêtement est trivial,  $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{N}}$  est tel que  $\pi(\tilde{b}) = b$  et  $V_{\tilde{b}}$  est la composante de  $\pi^{-1}(V_b)$  contenant  $\tilde{b}$ . L'hypothèse sur  $(D\pi)^*$  peut alors se reformuler en demandant que  $D\pi^{-1}$  soit bornée ainsi que toutes ses dérivées, indépendamment de  $b$ ,  $\tilde{b}$  et des voisinages correspondants. L'exemple suivant illustre que la conclusion du Théorème 8.3 peut échouer en l'absence de cette hypothèse supplémentaire. Notre exemple repose de façon clé sur le fait que l'espace  $W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  est sensible au choix du plongement lorsque  $\tilde{\mathcal{N}}$  n'est pas compacte, dans l'esprit de l'Exemple 4.2.

**Exemple 8.4.** Supposons que  $m > 2p$ . Définissons

$$j: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad j(t) = (t, e^{-t} \cos(e^t), e^{-t} \sin(e^t)),$$

que nous étendons de façon lisse à  $\mathbb{R}$  tout entier de sorte que  $|j'| > c > 0$  sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $\tilde{\mathcal{N}} = j(\mathbb{R})$ . De cette façon,  $j(\mathbb{R}^+)$  est une spirale composée de cercles de plus en plus petits, de sorte qu'un point mobile la parcourant à vitesse unité doit nécessairement tourner de plus en plus vite, ce qui résulte en une explosion de la dérivée seconde de la position de ce point; voir Figure 8.2.

Nous affirmons qu'il existe un plongement lisse isométrique  $i: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  mais qu'il existe  $u \in W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \mathbb{S}^1)$  qui ne se relève pas en une application  $\tilde{u} \in W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$  à travers le revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$  défini par  $\pi(x) = e^{i^{-1}(x)}$ , qui est bien un revêtement isométrique de  $\mathbb{S}^1$  par  $\tilde{\mathcal{N}}$  car l'exponentielle et  $i$  sont des isométries locales.

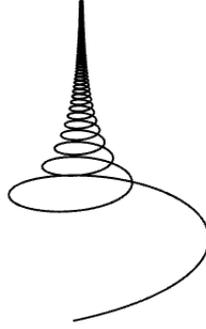


FIGURE 8.2 – Image de  $j(\mathbb{R}^+)$

L'existence du plongement  $i: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  est une conséquence directe de la possibilité de reparamétriser  $j$  à vitesse unité. On définit  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$s(t) = \int_0^t |j'(s)| ds,$$

qui est une bijection strictement croissante grâce au choix  $|j'| > c > 0$ , et on pose  $i(t) = j(s^{-1}(t))$ . On vérifie que  $|i'(t)| = 1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , ce qui suffit à assurer que  $i$  est un plongement isométrique.

On observe que  $|j''(t)| \geq C_1 e^t$  pour tout  $t \geq 0$ , avec  $C_1 > 0$ . De plus, nous avons  $1 \leq s'(t) \leq 2$  pour tout  $t \geq 0$ , ce qui entraîne que  $\frac{1}{2}t \leq s^{-1}(t) \leq t$ . En outre, nous avons  $|s''(t)| \leq C_2 e^{-2t}$ . Nous calculons que

$$i''(t) = j''(s^{-1}(t)) \frac{1}{s'(s^{-1}(t))^2} - j'(s^{-1}(t)) \frac{s''(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))^3}.$$

Ceci permet de déduire que  $|i''(t)| \geq C_3 e^{\frac{t}{2}}$  pour tout  $t \geq 0$  suffisamment grand.

Définissons  $v: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = |x|^{-\alpha}$  pour  $0 < \alpha < \frac{m-2p}{p}$ , et posons  $u = e^{iv}$  et  $\tilde{u} = i \circ v$ , de telle sorte que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ . Nous observons que  $u \in L^\infty(\mathbb{B}^m)$ ,  $|Du(x)| \leq C_4 |x|^{-\alpha-1}$  et  $|D^2u(x)| \leq C_5 |x|^{-\alpha-2}$ , ce qui assure que  $u \in W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \mathbb{S}^1)$  car  $p(2 + \alpha) < m$ . D'autre part, en utilisant la formule de Faà di Bruno, nous estimons

$$|D^2\tilde{u}(x)| \geq |i''(v(x))||Dv(x)|^2 - |i'(v(x))||D^2v(x)| \geq C_6 e^{\frac{1}{2}|x|^{-\alpha}}$$

pour  $|x|$  suffisamment réduit. Comme  $\alpha > 0$ , cette minoration implique que  $D^2\tilde{u} \notin L^p(\mathbb{B}^m)$ , et montre donc que  $\tilde{u} \notin W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$ . Plus généralement, nous avons  $\tilde{u} \notin W^{2,q}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$  pour tout  $q \geq 1$ .

Ce raisonnement permet seulement de montrer que  $\tilde{u}$  est un relèvement de  $u$  qui n'est pas de régularité  $W^{2,p}$ , mais rien n'exclut que  $u$  admette un autre relèvement  $\tilde{v}$

qui ait cette propriété. Nous reviendrons plus en détail sur la façon de construire des obstructions au relèvement dans la Section 8.4. Ici, comme le revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathbb{S}^1$  est le revêtement universel de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$  à homéomorphisme près, il est possible de raisonner de façon plus simple. Supposons qu'il existe  $\tilde{v} \in W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$  qui relève  $u$  à travers  $\pi$ . Notons que nous avons  $\tilde{u} \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\mathbb{B}^m \setminus \{0\}; \tilde{\mathcal{N}})$  car  $\tilde{u}$  est lisse loin de 0. Ceci entraîne qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\tilde{v} = i(v + 2\pi k)$  presque partout sur  $\mathbb{B}^m$ . Ce résultat est l'analogie pour les applications de Sobolev du principe d'unicité bien connu pour les relèvements de fonctions continues à valeurs dans le cercle : deux relèvements continus d'une même fonction continue à valeurs dans le cercle coïncident à une translation d'un multiple entier de  $2\pi$  près. Le lecteur pourra se référer à la Proposition 8.18 et à la remarque qui suit sa démonstration.

Or, comme  $\tilde{v} \in W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$  mais  $i(v + 2\pi k) \notin W^{2,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$  – par le même raisonnement que pour  $\tilde{u} = i \circ v$  – ceci est une contradiction, et achève la preuve de notre affirmation.

Une fois tous les ingrédients à disposition, la preuve du cas  $s > 1$  s'obtient à partir du cas  $s = 1$ . Néanmoins, outre une inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire, nous aurons besoin d'un résultat non trivial concernant la régularité du produit dans les espaces de Sobolev.

Nous commençons par présenter la preuve du Théorème 8.3 dans le cas particulier où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est revêtu par  $\mathbb{R}$  à travers l'application exponentielle, car cela permet d'illustrer plus clairement comment l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg fractionnaire et le résultat de produit dans les espaces de Sobolev s'articulent ensemble pour conduire au résultat souhaité. Cela correspond au cadre de travail de l'article de Bourgain, Brezis et Mironescu [9]. Notons que le résultat qui y figure ne doit pas être modifié, car l'hypothèse que nous avons ajoutée est bien vérifiée dans le cas du revêtement du cercle par l'application exponentielle. Le théorème de produit dont nous aurons besoin, que le lecteur pourra consulter dans [9, Lemma D.2] et [22, Lemma 5.2], s'énonce comme suit.

**Théorème 8.5.** *Soient  $s > 1$  et  $u, v \in W^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Nous avons  $u\nabla v \in W^{s-1,p}(\Omega)$  et*

$$\|u\nabla v\|_{W^{s-1,p}} \leq C(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{W^{s,p}} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{W^{s,p}}).$$

*Démonstration du Théorème 8.3 lorsque  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ .* Comme  $u \in W^{s,p} \cap L^\infty$ , l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg assure que  $u \in W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{S}^1)$ . L'hypothèse  $sp \geq 2$  permet d'invoquer la théorie du cas  $s = 1$  pour obtenir un relèvement  $\tilde{u} \in W^{1,sp}(\Omega; \mathbb{R})$  tel que  $u = e^{i\tilde{u}}$ . Il nous reste à prouver que  $\tilde{u} \in W^{s,p}$ .

Comme  $u = e^{i\tilde{u}}$ , nous obtenons  $\nabla u = i\nabla\tilde{u}e^{i\tilde{u}} = iu\nabla\tilde{u}$ , et donc  $\nabla\tilde{u} = -i\bar{u}\nabla u$ . Puisque  $u \in W^{s,p} \cap L^\infty$ , le Théorème 8.5 s'applique et fournit  $\nabla\tilde{u} \in W^{s-1,p}$ . Étant donné que  $\tilde{u} \in W^{1,sp}$ , nous avons en particulier  $\tilde{u} \in L^{sp} \subset L^p$  car  $s > 1$ , ce qui permet de conclure que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathbb{R})$  et achève la preuve.  $\square$

Dans le cas général, un raisonnement plus élaboré est requis car il n'est plus possible d'exprimer aussi simplement  $\nabla \tilde{u}$  en fonction de  $u$  et  $\nabla u$ , mais le principe reste le même. Nous aurons besoin d'une version plus générale du Théorème 8.5; voir par exemple [19, Lemma 6].

**Théorème 8.6.** *Soient  $0 < s < +\infty$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $1 < r < +\infty$ ,  $0 < \theta < 1$  et  $1 < t < +\infty$  tels que*

$$\frac{1}{r} + \frac{\theta}{t} = \frac{1}{p}.$$

*Si  $u \in W^{s,t} \cap L^\infty$  et  $v \in W^{\theta s,p} \cap L^r$ , alors  $uv \in W^{\theta s,p}$  et*

$$\|uv\|_{W^{\theta s,p}} \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|v\|_{W^{\theta s,p}} + \|v\|_{L^r} \|u\|_{W^{s,t}}^\theta \|u\|_{L^\infty}^\infty).$$

Dans leur article [6], Bethuel et Chiron invoquent l'existence d'un repère orthonormé du plan tangent  $T_{\tilde{x}}\tilde{\mathcal{N}}$ , défini pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$  et dont les vecteurs dépendent de façon lisse de  $\tilde{x}$ . Ceci se justifie par le fait qu'ils considèrent le cas où  $\tilde{\mathcal{N}}$  est le revêtement universel de  $\mathcal{N}$ . En particulier, il est simplement connexe et donc orientable, ce qui garantit l'existence d'un repère orthonormé lisse global du plan tangent. Cependant, comme l'illustre l'Exemple 8.4, la compacité de  $\mathcal{N}$  ne suffit en général pas à obtenir une borne sur les dérivées des vecteurs de ce repère, qui est nécessaire pour appliquer le Théorème 8.6. En effet,  $\{i'(t)\}$  est une base orthonormée du plan tangent à  $\mathcal{N}$  au point  $t$ , qui dépend de façon lisse de  $t$ , mais la dérivée de  $i'$  est non bornée.

Avec l'hypothèse supplémentaire que toutes les dérivées de  $(D\pi)^*$  sont bornées, cette affirmation se vérifie. Cependant, il reste nécessaire de modifier l'argument de Bethuel et Chiron si nous souhaitons inclure le cas où  $\tilde{\mathcal{N}}$  est un revêtement arbitraire. Nous allons utiliser de façon cruciale le fait que  $D\pi(\tilde{u})$  est inversible par son adjointe  $(D\pi(\tilde{u}))^*$ .

*Démonstration du Théorème 8.3 dans le cas général.* En raisonnant comme dans le cas du cercle, on obtient un relèvement  $\tilde{u} \in W^{1,sp}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . Puisque  $\nabla u = D\pi(\tilde{u})[\nabla \tilde{u}]$  et que  $D\pi(\tilde{u})$  est inversible par son adjointe, nous avons  $\nabla \tilde{u} = (D\pi(\tilde{u}))^*[\nabla u]$ . Étant donné que  $(D\pi)^*$  est bornée ainsi que toutes ses dérivées, nous pouvons appliquer le Théorème 4.4 pour déduire que  $(D\pi(\tilde{u}))^* \in W^{1,sp}(\Omega)$ . De plus,  $(D\pi(\tilde{u}))^* \in L^\infty(\Omega)$  car  $(D\pi(\tilde{u}))^*$  est une isométrie entre plans tangents. D'autre part, nous avons  $\nabla u \in W^{s-1,p}(\Omega) \cap L^{sp}(\Omega)$ . Observons que

$$\frac{1}{sp} + \frac{s-1}{sp} = \frac{1}{p}.$$

Si  $1 < s < 2$ , nous pouvons donc appliquer le Théorème 8.6 pour déduire  $\nabla \tilde{u} \in W^{s-1,p}(\Omega)$ , et par conséquent  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ .

Pour étendre le résultat à  $s \geq 2$ , nous procédons par induction. Nous supposons que pour un certain  $k \in \mathbb{N}_*$ , si  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  avec  $k \leq s$ , alors  $D^j \tilde{u} \in L^{\frac{sp}{j}}(\Omega)$  pour tout

$1 \leq j \leq k$ . Notons que le cas de base  $k = 1$  est vérifié car nous avons bien  $\tilde{u} \in W^{1,sp}(\Omega)$  par construction.

Prenons à présent  $k + 1 \leq s$ . Par hypothèse d'induction, nous avons  $D^j \tilde{u} \in L^{\frac{sp}{j}}(\Omega)$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ , et donc  $\tilde{u} \in W^{j, \frac{sp}{j}}(\Omega)$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ . En utilisant la formule de la dérivée du produit, nous calculons que

$$|D^{k+1} \tilde{u}| \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |D^j [(D\pi(\tilde{u}))^*] | |D^{k-j+1} u|.$$

Comme  $(D\pi)^*$  est bornée ainsi que toutes ses dérivées, le théorème de composition assure que  $(D\pi(\tilde{u}))^* \in W^{j, \frac{sp}{j}}(\Omega)$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ , et donc  $D^j [(D\pi(\tilde{u}))^*] \in L^{\frac{sp}{j}}(\Omega)$ . D'autre part, comme  $u \in W^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg assure que  $u \in W^{k-j+1, \frac{sp}{k-j+1}}(\Omega)$ , et donc  $D^{k-j+1} u \in L^{\frac{sp}{k-j+1}}(\Omega)$ . L'inégalité de Hölder permet de conclure que  $D^{k+1} \tilde{u} \in L^{\frac{sp}{k+1}}(\Omega)$ .

Par induction, nous en déduisons que  $\tilde{u} \in W^{k, \frac{sp}{k}}(\Omega)$  pour tout  $1 \leq k \leq s$ . Pour  $s$  entier, ceci suffit déjà à conclure. Pour  $k < s < k + 1$ , nous revenons à l'identité  $\nabla \tilde{u} = (D\pi(\tilde{u}))^* [\nabla u]$ , et nous remarquons que  $\nabla u \in W^{s-1,p}(\Omega) \cap L^{sp}(\Omega)$  et  $(D\pi(\tilde{u}))^* \in W^{k, \frac{sp}{k}}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , en utilisant à nouveau le théorème de composition. Le Théorème 8.6 permet de conclure en observant que

$$\frac{1}{sp} + \frac{s-1}{\frac{sp}{k}} = \frac{1}{p}. \quad \square$$

### 8.3 Le cas critique : quand le relèvement rencontre l'extension

Le lecteur attentif aura constaté que dans le Chapitre 4, nous n'avons pas traité le cas critique  $sp = m$ , contrairement à ce que nous avons fait pour les problèmes de l'approximation et de l'extension. Ceci découle du fait que pour le relèvement, le cas critique ne suit pas directement de l'injection  $W^{s,p} \subset \text{VMO}$  mais repose sur la théorie du cas  $s \geq 1$ , que nous avons présenté au début de ce chapitre. Avec ce résultat à disposition, nous pouvons à présent traiter le problème du relèvement dans le cas critique.

**Proposition 8.7.** *Supposons que  $sp = m$  et que toutes les dérivées de  $(D\pi)^*$  sont bornées. Pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Ce résultat est dû à Bourgain, Brezis et Mironescu [9, Theorem 2] dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est revêtu par  $\mathbb{R}$  *via* l'application exponentielle, et à Bethuel et Chiron [6, Theorem 3] dans le cas général. Notons qu'au vu des résultats obtenus dans le cas  $s \geq 1$ , nous avons déjà la conclusion de la Proposition 8.7 lorsque  $s \geq 1$  et  $m \geq 2$ . Dans le cas  $m = 1$  et  $s = 1$ , la théorie du cas sur-critique s'applique car l'injection de Morrey-Sobolev pour  $s = 1$  est valide jusqu'à l'exposant critique  $p = 1$  en dimension 1. Il reste donc uniquement à traiter le cas  $0 < s < 1$ . Nous suivons la démonstration proposée dans les références qui précèdent. L'argument repose sur un résultat d'extension, qui est construit sans être explicitement énoncé dans [9] et [6]. Forts des résultats obtenus dans la Section 3.2, nous présentons la preuve en rendant explicite ce lien entre la théorie du relèvement et celle de l'extension.

Nous allons nous reposer sur la Proposition 3.5. Nous aurons besoin de considérer des valeurs de  $s$  plus générales que  $s = 1 - \frac{1}{p}$ . À cette fin, remarquons simplement que lorsque  $v \in W^{s,p}(\mathbb{R}^m)$ , l'application  $V: \mathbb{R}^m \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $V(x, t) = \rho_t * v(x)$  satisfait  $V \in W^{s+\frac{1}{p},p}(\mathbb{R}^m \times (0, 1))$  dès que  $s \notin \mathbb{N}$ ; voir par exemple [22, Lemma 15.47]. Dès lors, nous pouvons utiliser la Proposition 3.5 pour tout exposant  $s \notin \mathbb{N}$  et pas uniquement pour  $s = 1 - \frac{1}{p}$ .

L'idée clé de la démonstration consiste à étendre successivement l'application  $u$ , ce qui à chaque étape augmente sa régularité de  $\frac{1}{p}$ . On poursuit ce procédé jusqu'à obtenir une extension de régularité  $s \geq 1$ , ce qui permet d'appliquer la théorie présentée dans les deux sections qui précèdent afin de relever cette extension. On revient finalement à  $u$  en prenant successivement la trace pour obtenir un relèvement de  $u$ .

Notons que dans la preuve qui va suivre, nous aurons besoin d'appliquer la théorie des traces pour l'espace  $W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  défini à partir de la distance géodésique sur  $\tilde{\mathcal{N}}$ . Le lecteur pourra consulter l'article de Chiron [24] pour s'assurer que cela est bien possible, de façon analogue à la théorie des traces classique.

*Démonstration.* Comme  $0 < s < 1$ , en vertu de la discussion qui précède, la Proposition 3.5 assure l'existence de  $\varepsilon > 0$  et de  $u_1 \in W^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega \times (0, \varepsilon); \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr}_\Omega u_1 = u$ . Quitte à dilater selon la dernière variable, nous pouvons supposer que  $\varepsilon = 1$ . Remarquons que nous avons  $(s + \frac{1}{p})p = sp + 1 = m + 1$ . Par conséquent, si  $s + \frac{1}{p} < 1$ , nous pouvons appliquer à nouveau la Proposition 3.5 pour obtenir  $u_2 \in W^{s+\frac{2}{p},p}(\Omega \times (0, 1)^2; \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr}_{\Omega \times (0,1)} u_2 = u_1$ . On poursuit ce procédé jusqu'à obtenir une application  $u_j \in W^{s+\frac{j}{p},p}(\Omega \times (0, 1)^j; \mathcal{N})$  pour le premier  $j \in \mathbb{N}_*$  tel que  $s + \frac{j}{p} \geq 1$ .

Comme  $(s + \frac{j}{p})p = sp + j = m + j \geq 2$ , nous pouvons appliquer le Théorème 8.1 ou le Théorème 8.3 pour obtenir  $\tilde{u}_j \in W^{s+\frac{j}{p},p}(\Omega \times (0, 1)^j; \tilde{\mathcal{N}})$  tel que  $u_j = \pi \circ \tilde{u}_j$ . On prend

alors  $j$  fois la trace – qui diminue la régularité de  $\frac{1}{p}$  à chaque étape – pour obtenir  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $\tilde{u} = \text{tr}_\Omega \tilde{u}_j$ . Par la régularité de  $\pi$ , nous avons  $\pi \circ \tilde{u} = u$ , ce qui montre que  $\tilde{u}$  est bien le relèvement souhaité et achève la preuve.  $\square$

## 8.4 Le cas $0 < s < 1$ : quand la compacité joue un rôle crucial

Nous nous tournons à présent vers le cas  $0 < s < 1$ . Si  $sp \geq m$ , alors la théorie des cas surcritique et critique s'applique et fournit une réponse positive au problème du relèvement. Le cas  $sp < 1$  admet également une réponse positive, mais la preuve repose sur une caractérisation non triviale des espaces de Sobolev, et ne sera pas traitée en détail dans ce travail ; voir [9] et [6] ou la section de commentaires et perspectives ci-dessous. Le cas  $1 \leq sp < 2$  se heurte quant à lui à l'obstruction topologique présentée dans la Section 4.3, et la réponse au problème du relèvement y est donc toujours négative. Seul le cas  $2 \leq sp < m$  échappe pour l'heure à notre analyse, et nous nous proposons donc de le traiter dans cette section.

Nous allons voir que la compacité du revêtement  $\tilde{\mathcal{N}}$  y joue un rôle crucial. Elle peut être caractérisée en termes du premier groupe d'homotopie de  $\mathcal{N}$  : on a  $\tilde{\mathcal{N}}$  compacte si et seulement si  $\pi_1(\mathcal{N})$  est fini.

Avant de poursuivre avec le développement des résultats principaux de cette section, nous nous arrêtons pour introduire un concept qui nous sera utile dans la suite de la section, celui de *rayon d'injectivité*. Le lecteur pourra consulter [26, Section 13.2] pour un exposé plus complet des notions de géométrie riemannienne qui vont suivre. Étant donnée une variété riemannienne complète  $\mathcal{M}$ , pour tout  $p \in \mathcal{M}$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $q \in \mathcal{M}$  satisfaisant  $d_{\mathcal{M}}(p, q) \leq \eta$ , il existe une unique géodésique de longueur inférieure à  $\eta$  reliant  $p$  à  $q$ . Cette géodésique est donc l'unique géodésique de longueur minimale reliant  $p$  à  $q$ , et sa longueur est  $d_{\mathcal{M}}(p, q)$ . Si  $\mathcal{M}$  est compacte, il existe par conséquent un nombre, appelé *rayon d'injectivité* et noté  $\text{inj}(\mathcal{M})$ , tel que pour tous  $p, q \in \mathcal{M}$  satisfaisant  $d_{\mathcal{M}}(p, q) \leq \text{inj}(\mathcal{M})$ , il existe une unique géodésique de longueur inférieure à  $\text{inj}(\mathcal{M})$  reliant  $p$  à  $q$ , qui est donc l'unique géodésique minimisante entre  $p$  et  $q$ , de longueur  $d_{\mathcal{M}}(p, q)$ .

**Exemple 8.8.** Supposons que  $\mathcal{M}$  est une sphère. Dans ce cas, deux points  $p, q \in \mathcal{M}$  distincts mais non antipodaux sont toujours reliés par exactement deux géodésiques, données par les deux portions du grand cercle passant par  $p$  et  $q$  délimitées par ces deux points. La plus courte de ces deux géodésiques est de longueur inférieure à la distance (calculée sur la sphère) entre deux points antipodaux, tandis que la plus longue est de longueur supérieure à cette distance. On pourra donc choisir comme rayon d'injectivité tout nombre strictement inférieur à la distance géodésique entre deux points antipodaux.

Nous utiliserons le lemme suivant, qui assure que les revêtements de variétés riemanniennes préservent localement la distance géodésique; voir par exemple [44, Lemma 2.1].

**Lemme 8.9.** *Pour tous  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{N}}$  tels que  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \text{inj}(\mathcal{N})$ , on a  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_{\mathcal{N}}(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  une paramétrisation d'une géodésique minimisante entre  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$ , et posons  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ . Comme  $\pi$  est une isométrie locale,  $\gamma$  est la paramétrisation d'une géodésique de  $\pi(\tilde{x})$  à  $\pi(\tilde{y})$ , de longueur  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \text{inj}(\mathcal{N})$ . Par définition du rayon d'injectivité, nous déduisons que  $\gamma$  est une géodésique minimisante de  $\pi(\tilde{x})$  à  $\pi(\tilde{y})$ , ce qui entraîne que  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_{\mathcal{N}}(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))$ .  $\square$

### 8.4.1 Le cas compact : l'inégalité d'oscillation inverse

Lorsque le revêtement  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compact, la condition  $sp \geq 2$  est à nouveau suffisante pour garantir que la réponse au problème du relèvement est positive, en accord avec tous les cas que nous avons considérés précédemment. Ce résultat est dû à Mironescu et Van Schaftingen [44, Theorem 1].

**Théorème 8.10.** *Supposons que  $0 < s < 1$ ,  $2 \leq sp < m$  et que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte. Pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Notre objectif dans ce travail est de présenter les étapes principales de leur raisonnement, et nous renvoyons le lecteur à leur article pour l'ensemble des détails.

L'ingrédient principal est une élégante inégalité en dimension 1, appelée *inégalité d'oscillation inverse*. À première vue, cette inégalité semble avoir peu de rapport avec le problème qui nous occupe, mais elle s'avérera d'une importance capitale dans la suite du raisonnement. Étant donnée  $f \in C^0(I)$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, on définit l'*oscillation* de  $f$  sur l'intervalle  $[x, y] \subset I$  par

$$\text{osc}_{[x,y]} f = \max_{[x,y]} f - \min_{[x,y]} f = \max\{|f(z) - f(t)| : z, t \in [x, y]\}.$$

**Théorème 8.11.** *Supposons que  $1 < p < +\infty$ ,  $0 < s < 1$  et  $sp > 1$ . Il existe  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et toute  $f \in C^0(I)$ ,*

$$\int_I \int_I \frac{(\text{osc}_{[x,y]} f)^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy \leq C \int_I \int_I \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy.$$

Le nom d'inégalité d'oscillation *inverse* provient du fait qu'on a toujours  $|f(x) - f(y)| \leq \text{osc}_{[x,y]}$  par définition, et l'inégalité opposée à l'inégalité ci-haut est donc trivialement vérifiée avec  $C = 1$ .

*Démonstration.* Nous nous reposons sur l'inégalité de Morrey fractionnaire, voir par exemple [43, Lemma 3] : pour tout  $\frac{1}{p} < \sigma < 1$ , il existe  $C > 0$  dépendant uniquement de  $\sigma$  et  $p$  telle que

$$|g(t) - g(z)| \leq C|t - z|^{\sigma - \frac{1}{p}} |g|_{W^{\sigma,p}((z,t))} \quad \text{pour tous } -\infty < z < t < +\infty \text{ et } g \in C^0([z, t]).$$

Puisque  $sp > 1$ , on peut choisir  $\frac{1}{p} < \sigma < s$ , et on obtient

$$\text{osc}_{[x,y]} f \leq C|y - x|^{\sigma - \frac{1}{p}} |f|_{W^{\sigma,p}((x,y))} \quad \text{pour tous } x, y \in I \text{ avec } x < y.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \int_I \int_I \frac{(\text{osc}_{[x,y]} f)^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy &\leq C_1 \int_I \int_I \frac{(|y - x|^{\sigma - \frac{1}{p}} |f|_{W^{\sigma,p}((x,y))})^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy \\ &\leq C_2 \int_I \int_I \int_{x < z < t < y} \frac{|f(t) - f(z)|^p}{(t - z)^{1+\sigma p}} \frac{1}{(y - x)^{2+(s-\sigma)p}} dt dz dx dy. \end{aligned}$$

Comme  $s - \sigma > 0$ , on trouve

$$\int_I \int_I \frac{1}{(y - x)^{2+(s-\sigma)p}} dx dy \leq C_3 \frac{1}{(t - z)^{(s-\sigma)p}},$$

et donc

$$\int_I \int_I \frac{(\text{osc}_{[x,y]} f)^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy \leq C_4 \int_I \int_I \frac{|f(t) - f(z)|^p}{|t - z|^{1+sp}} dz dt,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

De façon analogue, si  $\mathcal{M}$  est une variété et  $u \in C^0(I; \mathcal{M})$  avec  $I \subset \mathbb{R}$ , on définit l'oscillation de  $u$  sur l'intervalle  $[x, y] \subset I$  par

$$\text{osc}_{[x,y]} u = \max\{d_{\mathcal{M}}(u(z), u(t)) : z, t \in [x, y]\}.$$

Si pour  $z \in [x, y]$  fixé on définit  $f(\alpha) = d_{\mathcal{M}}(u(\alpha), u(z))$ , on observe que  $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq d_{\mathcal{M}}(u(\alpha), u(\beta))$ . En appliquant à  $f$  le raisonnement conduisant au Théorème 8.11, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 8.12.** *Soit  $\mathcal{M}$  une variété riemannienne connexe. Supposons que  $1 < p < +\infty$ ,  $0 < s < 1$  et  $sp > 1$ . Il existe  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et toute  $u \in C^0(I; \mathcal{M})$ ,*

$$\int_I \int_I \frac{(\text{osc}_{[x,y]} u)^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy \leq C \int_I \int_I \frac{d_{\mathcal{M}}(u(x), u(y))^p}{|x - y|^{1+sp}} dx dy.$$

L'étape suivante est d'obtenir une *estimation a priori* pour le relèvement dans le cas où  $u$  est continue. Le point crucial est l'estimation en dimension 1 sur un intervalle.

**Lemme 8.13.** *Supposons que  $0 < s < 1$ ,  $1 < p < +\infty$  et  $sp > 1$ . Supposons que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et pour toute  $u \in C^0(I; \mathcal{N})$ , tout relèvement  $\tilde{u} \in C^0(I; \tilde{\mathcal{N}})$  de  $u$  vérifie*

$$|\tilde{u}|_{W^{s,p}(I;\tilde{\mathcal{N}})} \leq C|u|_{W^{s,p}(I;\mathcal{N})}.$$

*Démonstration.* D'une part, si  $x, y \in I$  sont tels que  $\text{osc}_{[x,y]} u < \text{inj}(\mathcal{N})$ , alors nous avons  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) < \text{inj}(\mathcal{N})$ . Le Lemme 8.9 entraîne donc que

$$d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) = d_{\mathcal{N}}(u(x), u(y)) \leq \text{osc}_{[x,y]} u.$$

D'autre part, comme  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte, on a  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq C_1$  pour tous  $x, y \in I$ . Mais si  $x, y \in I$  sont tels que  $\text{osc}_{[x,y]} u \geq \text{inj}(\mathcal{N})$ , alors on trouve

$$d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq C_1 \leq C_2 \text{osc}_{[x,y]} u.$$

On en conclut que

$$d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) \leq C_3 \text{osc}_{[x,y]} u \quad \text{pour tous } x, y \in I.$$

Il suffit d'invoquer l'inégalité d'oscillation (Corollaire 8.12) sur  $\mathcal{N}$  pour conclure.  $\square$

Pour le cas général, on procède en deux temps. On commence par utiliser un argument de réduction de dimension reposant sur l'équivalence entre la semi-norme de Gagliardo  $|u|_{W^{\sigma,p}((0,1)^m)}^p$  et la quantité

$$\sum_{i=1}^m \int_{(0,1)^{m-1}} |u(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m)|_{W^{\sigma,p}((0,1))}^p dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_m \quad (8.1)$$

pour  $0 < \sigma < 1$ ; voir par exemple [1, Lemma 7.44]. Ceci permet d'obtenir un analogue du Lemme 8.13 sur un cube en dimension  $m$ . Ensuite, on utilise une version quantitative du Lemme 4.5 ([44, Lemma 3.5]) pour passer d'un résultat local sur un cube à un résultat global. On obtient finalement le lemme suivant [44, Corollary 3.6].

**Lemme 8.14.** *Supposons que  $0 < s < 1$ ,  $1 < p < +\infty$  et  $sp > 1$ . Supposons que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte. Soient  $\omega \subset \mathbb{R}^m$  tel que  $\overline{\omega} \subset \omega$  et  $u: \omega \rightarrow \mathcal{N}$ . Soit  $\Sigma \subset \omega$  une union finie de portions d'hyperplans de dimension  $k \leq m - 1$  alignés avec les axes de coordonnées, et supposons que  $u \in C^0(\omega \setminus \Sigma; \mathcal{N})$ . Alors, pour tout relèvement  $\tilde{u} \in C^0(\omega \setminus \Sigma; \tilde{\mathcal{N}})$  de  $u$ , on a*

$$|\tilde{u}|_{W^{s,p}(\Omega;\tilde{\mathcal{N}})} \leq C|u|_{W^{s,p}(\omega;\mathcal{N})},$$

où  $C > 0$  ne dépend que de  $s, p$  et  $\Omega$ .

Nous pouvons à présent procéder à la démonstration du Théorème 8.10. L'argument clé est une utilisation classique d'estimation *a priori*, comme on en rencontre notamment en théorie des équations aux dérivées partielles. On commence par approcher une fonction  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  que nous souhaitons relever par une suite de fonctions continues en dehors d'un ensemble singulier. Pour ces fonctions, le théorème du relèvement continu s'applique, et l'estimation *a priori* que nous avons obtenue permet d'obtenir de la compacité pour la suite des relèvements continus ainsi construits. Il suffit alors d'extraire une sous-suite convergente et de s'assurer que, en passant à la limite, on obtient un relèvement de régularité  $W^{s,p}$  pour  $u$ .

*Démonstration du Théorème 8.10.* Soit  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ . En utilisant le Lemme 1.4 pour élargir  $\Omega$  ainsi que le théorème d'approximation pour  $0 < s < 1$  – Théorème 5.13 – combiné à un argument diagonal, on trouve une suite de fonctions  $(u_n)_n$  telle que  $u_n \in W^{s,p}(\omega_n; \mathcal{N})$ ,  $u_n \in C^0(\omega_n \setminus \Sigma_n; \mathcal{N})$ ,  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  et  $(|u_n|_{W^{s,p}(\omega_n; \mathcal{N})})_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_n$  est un ouvert connexe contenant  $\Omega$  et  $\Sigma_n \subset \omega_n$  est une union finie de portions d'hyperplans de dimension  $m - [sp] - 1$  alignés avec les axes de coordonnées.

Comme  $sp \geq 2$ , on a  $m - [sp] - 1 \leq m - 3$ , ce qui permet de montrer que  $\omega_n \setminus \Sigma_n$  est simplement connexe; voir [44, Lemma 3.8]. Par conséquent, en vertu de la théorie du relèvement pour les fonctions continues, chaque  $u_n$  admet un relèvement  $\tilde{u}_n \in C^0(\omega_n \setminus \Sigma_n)$ . De plus, comme  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte, le Lemme 8.14 s'applique et fournit l'estimation *a priori*

$$|\tilde{u}_n|_{W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})} \leq C_1 |u_n|_{W^{s,p}(\omega_n; \mathcal{N})} \leq C_2,$$

où les constantes ne dépendent que de  $s, p, \Omega$  et  $u$ .

Nous invoquons la compacité de l'injection  $L^p \subset W^{s,p}$  pour déduire que la suite  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est compacte dans  $L^p(\Omega)$  – théorème de Rellich-Kondrashov – et à l'aide de la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, nous pouvons donc supposer qu'il existe  $\tilde{u} \in L^p(\Omega)$  telle que  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  presque partout. Le lemme de Fatou permet d'obtenir  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega)$ , et le fait que  $\tilde{u}_n \in \tilde{\mathcal{N}}$  presque partout combiné à la convergence  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  presque partout assure que  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . Quitte à extraire à nouveau une sous-suite, nous pouvons de plus supposer que  $u_n \rightarrow u$  presque partout.

En passant à la limite dans l'identité  $u_n = \pi \circ \tilde{u}_n$ , valide presque partout sur  $\Omega$ , nous obtenons donc  $u = \pi \circ \tilde{u}$ , ce qui montre que  $\tilde{u}$  est le relèvement souhaité pour  $u$  et conclut la preuve.  $\square$

## 8.4.2 Le cas non compact : obstruction sur des demi-droites géodésiques

Lorsque  $\tilde{\mathcal{N}}$  n'est pas compacte, un phénomène nouveau se produit. En effet, de nouvelles obstructions de nature analytique surgissent et font obstacle au relèvement dans toute la gamme  $1 \leq sp < m$ , comme le stipule le théorème suivant.

**Théorème 8.15.** *Supposons que  $0 < s < 1$ ,  $1 \leq sp < m$  et que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est non compacte. Il existe une application  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  telle qu'il n'existe aucune application  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  satisfaisant  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Nous suivons le raisonnement de Bethuel et Chiron [6, Proposition 2], lui-même inspiré par les travaux de Bourgain, Brezis et Mironescu [9, Lemma 5]. Nous présentons une version modifiée de l'argument qui permet de traiter le cas d'un revêtement arbitraire, les deux références qui précèdent se plaçant dans le cadre du revêtement universel.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la Section 7.5, le cas modèle pour le cas non compact est le revêtement de  $\mathbb{S}^1$  par  $\mathbb{R}$  via l'application exponentielle, traité dans [9]. L'ingrédient clé de l'obstruction au relèvement est la fonction  $\tilde{u}: \mathbb{B}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tilde{u}(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{avec} \quad \frac{m-sp}{p} \leq \alpha < \frac{m-sp}{sp}.$$

Nous avons observé que cette fonction satisfait  $u = e^{i\tilde{u}} \in W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathbb{S}^1)$  mais  $\tilde{u} \notin W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathbb{R})$ . En utilisant ces propriétés ainsi qu'un résultat d'unicité du relèvement, valide lorsque  $sp \geq 1$ , on montre que  $u$  est une fonction de régularité  $W^{s,p}$  qui ne se relève pas en une application  $W^{s,p}$  à travers l'application exponentielle. De plus, nous avons montré que  $u \in H^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathbb{S}^1)$ . Par une adaptation de l'argument utilisé dans la Section 7.5, on peut montrer que l'application annoncée par le Théorème 8.15 appartient à  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , justifiant la nature analytique de l'obstruction.

La construction de  $\tilde{u}$  repose de façon cruciale sur le fait qu'elle explose au voisinage de 0. Afin de transporter cette construction vers un revêtement  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  arbitraire, nous nous reposons sur le lemme suivant, qui garantit l'existence de *demi-droites géodésiques*; voir par exemple [6, Proposition 2, Step 1]. Lorsque  $\tilde{\mathcal{N}}$  n'est pas compacte, on ne peut pas construire de demi-droites géodésiques. Ceci explique que l'obstruction analytique n'apparaisse que dans le cas non compact.

**Lemme 8.16.** *Supposons que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est non compacte. Pour tout  $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{N}}$ , il existe une application continue  $f: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(f(t), f(s)) = |t - s|$  pour tous  $t, s \in [0, +\infty)$  et  $f(0) = \tilde{b}$ .*

*Démonstration.* Comme  $\tilde{\mathcal{N}}$  n'est pas compacte, il existe une suite  $(\tilde{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $\ell_n = d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{b}, \tilde{b}_n) \rightarrow +\infty$ . Il existe une géodésique minimisante à vitesse unité

$f_n : [0, \ell_n] \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  de  $\tilde{b}$  à  $\tilde{b}_n$ , c'est-à-dire telle que  $f_n(0) = \tilde{b}$ ,  $f_n(\ell_n) = \tilde{b}_n$  et  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(f_n(t), f_n(s)) = |t-s|$  pour tous  $t, s \in [0, \ell_n]$ . En particulier, la famille  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée et équi-uniformément continue sur tout compact de  $[0, +\infty)$ , ce qui permet d'invoquer le théorème de compacité d'Arzelà-Ascoli. Après extraction à l'aide d'un argument diagonal, nous pouvons donc supposer qu'il existe  $f : [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  continue telle que  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur tout compact de  $[0, +\infty)$ . En passant à la limite, on trouve  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(f(t), f(s)) = |t-s|$  pour tous  $t, s \in [0, +\infty)$  et  $f(0) = \tilde{b}$ , ce qui montre que  $f$  est l'application souhaitée.  $\square$

La construction de l'application  $\tilde{u}$  dans le cas général s'obtient en effectuant la construction décrite précédemment le long d'une demi-droite géodésique. Le lemme suivant collecte les propriétés importantes de cette application; voir par exemple [9, Lemma 5] ou [6, Proposition 2, Step 2].

**Lemme 8.17.** *Supposons que  $1 \leq sp < m$  et  $0 < s < 1$ . Soit  $\tilde{u} : \mathbb{B}^m \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  définie par*

$$\tilde{u}(x) = f(|x|^{-\alpha}) \quad \text{avec} \quad \frac{m-sp}{p} \leq \alpha < \frac{m-sp}{sp},$$

où  $f : [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  est une demi-droite géodésique. Nous avons  $u = \pi \circ \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathcal{N})$  mais  $\tilde{u} \notin W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$ . En outre,  $\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{B}^m)}$  est bornée indépendamment de  $f$ .

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est muni du revêtement par l'application exponentielle. En effet, nous avons  $u \in L^\infty(\mathbb{B}^m; \mathcal{N})$  car  $\mathcal{N}$  est compacte, ainsi que  $|\nabla u(x)| \leq \alpha|x|^{-\alpha-1}$  car  $f$  est 1-lipschitzienne. Ceci permet de déduire que  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg comme dans le cas du cercle, et comme ces estimations ne dépendent pas de  $f$ , on obtient en outre que  $\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{B}^m)}$  est bornée indépendamment de  $f$ .

D'autre part, comme  $f$  est géodésique, nous avons

$$|\tilde{u}|_{W^{s,p}(\mathbb{B}^m)} = \int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y))^p}{|x-y|^{m+sp}} dx dy = \int_{\mathbb{B}^m} \int_{\mathbb{B}^m} \frac{||x|^{-\alpha} - |y|^{-\alpha}|^p}{|x-y|^{m+sp}} dx dy.$$

Cette dernière quantité est infinie d'après l'Exemple 3.4, ce qui permet de conclure que  $\tilde{u} \notin W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \tilde{\mathcal{N}})$ .  $\square$

Par construction, l'application  $u$  que nous avons construite admet  $\tilde{u}$  comme candidat relèvement, mais  $\tilde{u}$  n'est pas de régularité  $W^{s,p}$ . Néanmoins, rien n'assure que  $u$  n'admet pas un autre relèvement, qui lui est de régularité  $W^{s,p}$ . Le dernier ingrédient dans notre raisonnement, assurant que cela ne se produit pas, est un résultat d'unicité du relèvement dans la gamme  $sp \geq 1$ .

**Proposition 8.18.** *Supposons que  $sp \geq 1$ , et que  $\Omega$  est connexe (mais pas nécessairement simplement connexe). Soient  $\tilde{u}, \tilde{v} \in W_{\text{loc}}^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telles que  $\pi \circ \tilde{u} = \pi \circ \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$ . Alors soit  $\tilde{u} = \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$ , soit  $\tilde{u} \neq \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$ .*

Nous allons utiliser sans preuve le fait que toute application de régularité  $W^{s,p}$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  est constante lorsque  $sp \geq 1$ ; voir par exemple [9, Theorem B.1]. En dimension 1, cela suit de l'injection  $W^{s,p} \subset \text{VMO}$  et du fait que l'image d'un ouvert connexe par une application VMO est connexe; voir [23, p.224]. Le passage en dimension arbitraire se fait par réduction de dimension, en utilisant l'équivalence entre la semi-norme de Gagliardo et la quantité définie à l'équation (8.1).

Notons le contraste avec la gamme  $sp < 1$ , où le lecteur pourra vérifier que l'espace  $W^{s,p}$  contient par exemple toutes les fonctions indicatrices de cubes. Avec la caractérisation fournie par l'équation (8.1), il suffit de s'en assurer en dimension 1, où le résultat est une conséquence directe du fait que  $x \mapsto |x - a|^{-\alpha}$  est intégrable autour de la singularité en  $a$  pour  $\alpha < 1$ .

*Démonstration de la Proposition 8.18.* Nous pouvons supposer que  $\tilde{u}, \tilde{v} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ , le cas général suivant par un argument de connexité. Définissons  $g: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  par

$$g(x) = \frac{1}{\text{inj}(\mathcal{N})} \min(d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)), \text{inj}(\mathcal{N})).$$

Notons que si  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) \leq \text{inj}(\mathcal{N})$ , alors  $d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) = d_{\mathcal{N}}(\pi(\tilde{u}(x)), \pi(\tilde{v}(x))) = 0$  en vertu du Lemme 8.9, ce qui assure que  $g$  est bien à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . En outre, nous avons  $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{\text{inj}(\mathcal{N})}(d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)) + d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{v}(x), \tilde{v}(y)))$ , ce qui assure que  $g \in W^{s,p}(\Omega)$ . Dès lors, comme  $sp \geq 1$  et  $\Omega$  est connexe, soit  $g = 0$  presque partout sur  $\Omega$  et donc  $\tilde{u} = \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$ , soit  $g = 1$  presque partout sur  $\Omega$  et donc  $\tilde{u} \neq \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$ .  $\square$

Dans le cas où  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est le revêtement universel, on peut obtenir un résultat plus fort que celui qui précède. En effet, tout revêtement universel est en particulier *normal*, ce qui signifie que pour toute paire de points  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathcal{N}}$  telle que  $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$ , il existe un *automorphisme de revêtement* qui envoie  $\tilde{x}$  sur  $\tilde{y}$ , c'est-à-dire un homéomorphisme  $\tau: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  tel que  $\pi \circ \tau = \pi$  et  $\tau(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Dans le cas d'un revêtement normal, un autre résultat d'unicité assure que deux applications  $\tilde{u}, \tilde{v} \in W_{\text{loc}}^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telles que  $\pi \circ \tilde{u} = \pi \circ \tilde{v}$  presque partout sur  $\Omega$  coïncident à un automorphisme de revêtement près, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme  $\tau: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  tel que  $\pi \circ \tau = \pi$  et  $\tilde{u} = \tilde{v} \circ \tau$  sur  $\Omega$ ; voir par exemple [44, Section 4]. Mais alors, si  $\tilde{u}$  et  $u$  sont définies comme dans le Lemme 8.17, l'application  $u$  ne peut admettre un relèvement  $\tilde{v} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . En effet, si tel était le cas, en vertu de la discussion qui précède, nous aurions  $\tilde{u} = \tilde{v} \circ \tau \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ , une contradiction.

Dans le cas d'un revêtement arbitraire, cette approche échoue, et nous ne pouvons donc nous reposer que sur la Proposition 8.18. Ceci explique la nécessité de présenter

un argument modifié pour traiter le cas général. Notre raisonnement s'inspire de la méthode de construction d'obstructions analytiques présentée au Chapitre 7. Comme une seule obstruction le long d'une demi-droite géodésique n'est plus suffisante pour construire une application  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  ne pouvant être relevée, nous allons recoller une infinité de telles obstructions, une au départ de chaque point de la fibre d'un point  $b \in \mathcal{N}$  fixé, afin de « saturer » tous les emplacements disponibles pour relever l'application  $u$  que nous allons construire.

*Démonstration du Théorème 8.15.* Fixons  $b \in \mathcal{N}$ . Comme  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  est un revêtement de variétés avec  $\tilde{\mathcal{N}}$  non compacte, l'ensemble des  $\tilde{b} \in \tilde{\mathcal{N}}$  tels que  $\pi(\tilde{b}) = b$  est dénombrable, et on le note  $\{\tilde{b}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Pour  $\delta > 0$  suffisamment réduit, il existe une suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $B_{\delta 2^{-i}}(a_i) \subset \Omega$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et  $\overline{B_{\delta 2^{-i}}(a_i)} \cap \overline{B_{\delta 2^{-j}}(a_j)} = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on invoque le Lemme 8.16 pour obtenir une demi-droite géodésique  $f_i: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  au départ de  $\tilde{b}_i$ . Pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , on définit  $\tilde{u}_i: \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$  en posant

$$\tilde{u}_i(x) = f_i(|\delta^{-1}2^i(x - a_i)|^{-\alpha} - 1) \quad \text{sur } B_{\delta 2^{-i}}(a_i), \text{ avec } \frac{m - sp}{p} \leq \alpha < \frac{m - sp}{sp},$$

et en étendant par  $\tilde{b}_i$  en dehors de  $B_{\delta 2^{-i}}(a_i)$ . Notons que le fait de retrancher 1 à l'argument de  $f_i$  dans la définition de  $\tilde{u}_i$  assure qu'elle se recolle correctement sur le bord de la boule  $B_{\delta 2^{-i}}(a_i)$  et ne détruit pas les propriétés fournies par le Lemme 8.17. On définit  $u: \Omega \rightarrow \mathcal{N}$  par

$$u = \begin{cases} \pi \circ \tilde{u}_i & \text{sur } B_{\delta 2^{-i}}(a_i), \\ b & \text{sur } \Omega \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{\delta 2^{-i}}(a_i). \end{cases}$$

Le Lemme 8.17 assure que  $\tilde{u}_i \notin W^{s,p}(B_{\delta 2^{-i}}(a_i))$ , tandis qu'après une mise à l'échelle,  $|u|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_1(\delta 2^{-i})^{m-sp}$ . La propriété de recollement dénombrable pour les applications de Sobolev fractionnaires assure que

$$|u|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C_2 \sum_{i \in \mathbb{N}} (\delta 2^{-i})^{m-sp} < +\infty,$$

où nous avons utilisé le fait que  $sp < m$ . Comme  $\mathcal{N}$  est compacte, on en conclut que  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ .

Supposons par l'absurde qu'il existe  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ . Comme  $\pi(\tilde{b}_i) = b$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , nous avons  $\pi \circ \tilde{u} = \pi \circ \tilde{u}_i$  sur  $\Omega \setminus \left( \{a_i\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} B_{\delta 2^{-j}}(a_j) \right)$ , qui est un sous-ensemble ouvert connexe de  $\Omega$ . Puisque  $\tilde{u}_i \notin W^{s,p}(B_{\delta 2^{-i}}(a_i))$  mais  $\tilde{u}_i \in W_{\text{loc}}^{s,p}(\Omega \setminus \{a_i\})$ , la Proposition 8.18 implique que  $\tilde{u} \neq \tilde{u}_i$  presque partout sur  $\Omega \setminus \left( \{a_i\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} B_{\delta 2^{-j}}(a_j) \right)$ , sans quoi nous aurions  $\tilde{u} = \tilde{u}_i$  presque partout sur

$\Omega \setminus \left( \{a_i\} \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} B_{\delta 2^{-j}}(a_j) \right)$  et donc  $\tilde{u}_i \in W^{s,p}(B_{\delta 2^{-i}}(a_i))$ . En particulier, nous avons  $\tilde{u} \neq \tilde{b}_i$  presque partout sur  $\Omega \setminus \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{\delta 2^{-j}}(a_j) \right)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , une contradiction avec le fait que  $\pi \circ \tilde{u} = u = b$  sur  $\Omega \setminus \left( \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{\delta 2^{-j}}(a_j) \right)$ . On conclut qu'un tel relèvement  $\tilde{u}$  ne peut exister, ce qui achève la preuve.  $\square$

## 8.5 Quand l'extension rencontre le relèvement

Dans la Section 8.3, nous avons vu comment des résultats d'extension peuvent être utilisés afin d'obtenir des résultats de relèvement. Nous achevons ce chapitre par cette courte section qui boucle la boucle, en montrant comment des résultats de relèvement peuvent être employés pour déduire des résultats d'extension. Nous considérons ici uniquement un résultat d'extension locale. Le résultat qui suit est dû à Mironescu et Van Schaftingen [45, Theorem 1.6], mais l'observation qu'on peut obtenir une extension à l'aide du relèvement remonte à Bethuel [4].

**Théorème 8.19.** *Supposons que  $3 \leq p < m$ , que  $\pi_j(\mathcal{N}) = \{0\}$  pour tout  $2 \leq j \leq [p-1]$  et que  $\pi_1(\mathcal{N})$  est fini. Pour toute  $u \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^{m-1}; \mathcal{N})$ , il existe  $U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1); \mathcal{N})$  telle que  $\text{tr } U = u$ .*

Ce résultat est exactement le Théorème 6.2 dû à Hardt et Lin, à ceci près qu'on permet désormais au premier groupe d'homotopie de  $\mathcal{N}$  d'être simplement fini plutôt que trivial.

*Démonstration.* Soit  $\pi: \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$  le revêtement universel de  $\mathcal{N}$ . Un résultat de topologie assure que  $\pi_j(\tilde{\mathcal{N}}) = \{0\}$  pour tout  $2 \leq j \leq [p-1]$ ; voir par exemple [35, Proposition 4.1] ou [36, Proposition 6.1]. En outre, le revêtement universel étant connexe et simplement connexe, nous trouvons que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est  $[p-1]$ -connexe. Comme  $(1 - \frac{1}{p})p = p - 1 \geq 2$ , Théorème 8.10 assure l'existence de  $\tilde{u} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\mathbb{B}^{m-1}; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ . Le théorème d'extension dans le cas  $[p-1]$ -connexe permet alors d'étendre  $\tilde{u}$  en une application  $\tilde{U} \in W^{1,p}(\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1); \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $\text{tr } \tilde{U} = \tilde{u}$ . Il suffit de projeter cette extension en posant  $U = \pi \circ \tilde{U}$ , et la continuité de la trace ainsi que la régularité de  $\pi$  permettent de conclure que  $U \in W^{1,p}(\mathbb{B}^{m-1} \times (0,1); \mathcal{N})$  et  $\text{tr } U = u$ .  $\square$

## 8.6 Commentaires et perspectives

### 8.6.1 Le cas $sp < 1$ : quand les fonctions constantes par morceaux sont dans $W^{s,p}$

Dans le cas  $sp < 1$ , la réponse au problème du relèvement est toujours positive.

**Théorème 8.20.** *Supposons que  $sp < 1$ . Pour toute  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , il existe  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  telle que  $u = \pi \circ \tilde{u}$ .*

Ce théorème est dû à Bourgain, Brezis et Mironescu [9, Theorem 2] dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$  est muni de son revêtement universel par  $\mathbb{R}$ , et à Bethuel et Chiron [6, Theorem 3] dans le cas général. La preuve repose sur une caractérisation de  $W^{s,p}$ , valide dans la gamme  $sp < 1$ . Nous n'entrerons pas dans les détails du raisonnement, mais mentionnons l'ingrédient initial de l'argument.

Comme nous l'avons déjà évoqué, lorsque  $sp < 1$ , les fonctions plateau appartiennent à  $W^{s,p}$ . Ce fait permet de travailler avec des fonctions constantes par morceaux, et autorise donc le raisonnement suivant. On commence par étendre  $u$  par une constante, ce qui préserve la régularité  $W^{s,p}$  dans la gamme  $sp < 1$ . Nous pouvons donc supposer que  $\Omega = (0, 1)^m$ . On se donne une partition dyadique  $\mathcal{P}_n$  de  $\Omega$  en cubes de côté  $2^{-n}$ , et pour chaque  $x \in \Omega$ , on pose

$$E_n(u)(x) = \int_{Q_n(x)} u,$$

où  $Q_n(x)$  est l'unique cube de  $\mathcal{P}_n$  contenant  $x$ . On se donne ensuite un voisinage tubulaire  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{N}$ , et on pose

$$U_n(x) = \begin{cases} \Pi(E_n(u)(x)) & \text{si } E_n(u)(x) \in \mathcal{O}, \\ b & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $b \in \mathcal{N}$  a été fixé arbitrairement. On peut montrer à l'aide du théorème de différentiation de Lebesgue que  $E_n(u) \rightarrow u$  presque partout, et donc  $U_n \rightarrow u$  presque partout.

Comme  $U_n$  prend un nombre fini de valeurs, on peut la relever « à la main » en une fonction  $\tilde{U}_n$ , en choisissant un élément de la fibre de chaque valeur de  $U_n$ . De plus, on peut réaliser cette construction en contrôlant l'écart entre  $\tilde{U}_n$  et  $\tilde{U}_{n-1}$  par l'écart entre  $U_n$  et  $U_{n-1}$ . En choisissant convenablement cet écart et en utilisant des estimations  $W^{s,p}$  disponibles dans la gamme  $sp < 1$ , on peut montrer que  $\tilde{U}_n \rightarrow \tilde{u}$  dans  $L^p(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  pour une certaine  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , qui s'avère être un relèvement de  $u$ .

Avec ce résultat ajouté à la liste, nous avons la réponse *complète* au problème du relèvement. Autrement dit, connaissant  $s, p, \mathcal{N}$  et  $\tilde{\mathcal{N}}$ , on peut déterminer avec certitude si toute application  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  se relève en une application  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$  ou non. Remarquons que des trois problèmes que nous avons présentés dans ce mémoire, le problème du relèvement est *le seul* pour lequel une réponse complète est disponible dans la théorie actuelle.

### 8.6.2 Quand le relèvement échoue : quelles fonctions peuvent être relevées

Supposons être dans la gamme  $1 \leq sp < 2$  avec  $m \geq 2$ . Dans ce cas, nous savons – voir le Théorème 4.7 – que la réponse au problème du relèvement est négative. Autrement dit, il existe  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  qui ne se relève pas en  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ . Une question naturelle se pose alors : quelles applications  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$  peuvent tout de même être relevées ? Dans cette direction, nous nous contentons de mentionner le résultat suivant, dû à Mironescu et Van Schaftingen [44, Theorem 3].

**Théorème 8.21.** *Supposons que  $\tilde{\mathcal{N}}$  est compacte et que  $0 < s < 1$  avec  $1 < sp < 2 \leq m$ . Si  $u \in H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , alors  $u$  peut être relevée en  $\tilde{u} \in W^{s,p}(\Omega; \tilde{\mathcal{N}})$ .*

Autrement dit, ce théorème garantit qu’en l’absence d’obstructions topologiques (qui font obstacle à l’approximation par des fonctions lisses), le relèvement est possible dans la gamme  $1 < sp < 2$ . Le lecteur est invité à comparer ce résultat avec le Théorème 7.9, qui montre que lorsque  $sp = 1$ , des obstructions au relèvement surgissent même en l’absence d’obstructions topologiques.

La preuve du Théorème 8.21 suit la stratégie de la preuve du Théorème 8.10, en utilisant l’estimation *a priori* fournie par l’inégalité d’oscillation.

Une question analogue se pose pour les problèmes de l’approximation et de l’extension. Dans le cas où la réponse est négative, est-il possible de caractériser l’espace  $H^{s,p}(\Omega; \mathcal{N})$ , ou l’image de l’opérateur  $\text{tr} : W^{1,p}(\Omega; \mathcal{N}) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega; \mathcal{N})$  ?

Dans le cas où  $\mathcal{N} = \mathbb{S}^\ell$ , ce type de problème peut être abordé entre autres à l’aide de la notion de *Jacobien*. Ce concept fait l’objet de nombreux développements – voir par exemple le livre de Brezis et Mironescu [22] et les références qui s’y trouvent – et l’aborder de façon détaillée nous emmènerait bien au-delà du cadre de ce travail, aussi nous nous contenterons d’en donner un bref aperçu pour éveiller la curiosité du lecteur intéressé. Nous supposons que  $\ell = 1$ . Le Jacobien d’une application  $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega; \mathbb{S}^1)$  peut être défini comme la *distribution*

$$Ju = \frac{1}{2} \left( \partial_{x_1} \left( u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \partial_{x_2} \left( u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right),$$

où  $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ .

Si  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbf{S}^1)$ , alors  $Ju = 0$ . En effet, puisque  $u$  est lisse, on calcule que

$$Ju = \frac{\partial u}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Comme  $u$  est à valeurs dans  $\mathbf{S}^1$ , les vecteurs  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_2}$  sont colinéaires, ce qui entraîne que  $Ju = 0$ .

À l'inverse, reprenons une dernière fois notre exemple habituel défini sur  $\mathbb{B}^2$  par  $u(x) = \frac{x}{|x|}$ . On calcule que

$$u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) = \frac{-x_2}{|x|^2} \quad \text{et} \quad u \wedge \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{|x|^2},$$

et on peut alors montrer – voir par exemple [22, Remark 1.9] – que

$$Ju = \pi \delta_0,$$

où  $\delta_0$  est le delta de Dirac en 0. Cet exemple suggère que le Jacobien  $Ju$  est connecté à l'ensemble singulier de l'application  $u$  – ici par exemple, notre application  $u$  admet une unique singularité topologique, localisée en l'origine, et le Jacobien détecte cette singularité.

Le résultat suivant révèle que le Jacobien permet effectivement de caractériser la classe  $H^{s,p}(\Omega; \mathbf{S}^1)$ ; voir par exemple [22, Theorem 10.4].

**Théorème 8.22.** *Supposons que  $m \geq 2$ ,  $s \geq 1$  et  $1 \leq sp < 2$ . Soit  $u \in W^{s,p}(\Omega; \mathbf{S}^1)$ . On a  $u \in H^{s,p}(\Omega; \mathbf{S}^1)$  si et seulement si  $Ju = 0$ .*

Ceci n'est qu'un bref aperçu des multiples connexions entre le Jacobien et les différents problèmes que nous avons étudiés dans ce travail. Par exemple, il est possible d'approfondir considérablement le lien entre  $Ju$  et l'ensemble singulier de l'application  $u$ , mais c'est une autre histoire. . .

# Conclusion

Ici s'achève notre périple au sein de ce domaine passionnant que sont les espaces de Sobolev à valeurs variétés. Il nous a emmenés à la découverte d'une discipline où les techniques de l'analyse classique côtoient désormais des concepts de géométrie différentielle ainsi que de théorie de l'homotopie. Nous avons eu l'occasion de rencontrer quelques-uns des problèmes fascinants soulevés par ces espaces de Sobolev à valeurs variétés, et un certain nombre d'outils permettant de les aborder.

Le premier de ces outils est la projection sur le point le plus proche, qui permet d'avoir recours à la théorie classique, quitte à détruire la contrainte variété, et ensuite ramener nos constructions sur la cible. Dans la gamme  $sp > m$ , cette approche fonctionne à merveille grâce à la grande régularité des applications de Sobolev garantie par l'injection de Morrey-Sobolev. Lorsque  $sp = m$ , l'injection de Morrey-Sobolev échoue, mais nous avons présenté la théorie des fonctions de moyenne évanescence qui offre un substitut approprié dans ce cas critique. Nous avons finalement appris que le cas sous-critique est quant à lui bien plus délicat.

Lorsque la topologie de la variété cible est suffisamment simple, nous avons expliqué la méthode de la projection singulière, qui s'applique même dans le cas sous-critique où les applications de Sobolev sont peu régulières, et permet de continuer à travailler sur la cible. Sa mise en œuvre nous a demandé une belle combinaison de notions issues de la topologie, la géométrie différentielle et l'analyse. Pour une variété générale, nous avons été contraints de travailler sur le domaine, et les raisonnements sont alors bien plus techniques. Un thème commun, sans pour autant vouloir y réduire les différents arguments que nous avons présentés, consistait à effectuer des décompositions du domaine et à étudier le comportement de nos fonctions sur des sous-ensembles génériques de dimension inférieure où l'injection de Morrey-Sobolev est applicable. Nous avons découvert que cela nécessite bien de la prudence et de la précision, et que le quantificateur *presque partout* peut être source de nombreuses subtilités.

Bien que se voulant une synthèse du domaine, ce mémoire est loin d'en fournir une vision complète. Les sections de perspectives et commentaires fournissent au lecteur des idées pour approfondir ses recherches, mais de nombreux autres thèmes n'ont pas pu être évoqués dans ce travail. En faisant appel aux outils de la théorie géométrique de la mesure, on pourra notamment chercher à donner un sens et à étudier l'ensemble singulier des fonctions de Sobolev à valeurs variétés. Nous avons vu que ces fonctions peuvent parfois être approchées par des fonctions lisses sauf sur

un ensemble singulier, et il est donc naturel de s'interroger sur ce qu'il advient de cet ensemble singulier lorsqu'on passe à la limite. Dans une autre direction, on pourra combiner les outils de la théorie des espaces de Sobolev à valeurs variétés au calcul des variations afin de considérer des problèmes de minimisation sur des variétés. Cela est naturel dans le cadre des applications physiques que nous avons pour motivation, car il est courant que la configuration d'un système physique puisse être décrite en minimisant une certaine énergie. Nous ne prétendons bien entendu pas donner une liste exhaustive des pistes d'approfondissement.

La théorie elle-même est encore loin d'être achevée. Un aspect fascinant des espaces de Sobolev à valeurs variétés est leur capacité à soulever des problèmes ouverts aisés à comprendre pour le lecteur débutant, mais qui résistent depuis des dizaines d'années. Comme nous avons eu l'occasion de l'évoquer, en ce qui concerne les problèmes de l'approximation et de l'extension, ce qu'il advient dans certaines gammes des paramètres reste à ce jour inconnu. Le problème de l'approximation faible, que nous n'avons fait qu'effleurer, est lui aussi source de questions ouvertes. De nombreuses pistes de généralisation existent également. Pour n'en citer qu'une, on pourra par exemple chercher à étudier ce qui se produit si on relaxe les hypothèses sur la variété cible, en particulier la compacité. À la connaissance de l'auteur, cela n'a été considéré que pour le problème de l'approximation et avec des fonctions de Sobolev d'ordre 1.

Nous espérons que pour le lecteur, le voyage n'est pas terminé. Notre souhait est que cette modeste synthèse ait suscité son intérêt pour ce domaine fascinant que sont les espaces de Sobolev à valeurs variétés, et lui ait donné l'envie de poursuivre plus avant son étude de cette discipline et, qui sait, de contribuer à la résolution d'un des nombreux problèmes ouverts qu'elle soulève. Nous espérons que ce travail lui sera utile pour aborder avec plus de facilité la littérature spécialisée.

# Références

- [1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. ↑22, 24, 27, 119
- [2] F. Bethuel, *The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds*, Acta Math. **167** (1991), no. 3-4, 153–206. ↑55, 57, 68, 69, 74
- [3] ———, *Approximations in trace spaces defined between manifolds*, Nonlinear Anal. **24** (1995), no. 1, 121–130. ↑71
- [4] ———, *A new obstruction to the extension problem for Sobolev maps between manifolds*, J. Fixed Point Theory Appl. **15** (2014), no. 1, 155–183. ↑91, 95, 125
- [5] ———, *A counterexample to the weak density of smooth maps between manifolds in Sobolev spaces*, Invent. Math. **219** (2020), no. 2, 507–651. ↑75
- [6] F. Bethuel and D. Chiron, *Some questions related to the lifting problem in Sobolev spaces*, Perspectives in nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., vol. 446, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 125–152. ↑9, 53, 104, 110, 113, 115, 116, 121, 122, 126
- [7] F. Bethuel and F. Demengel, *Extensions for Sobolev mappings between manifolds*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), no. 4, 475–491. ↑41, 44, 91
- [8] F. Bethuel and X. M. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **80** (1988), no. 1, 60–75. ↑31, 45, 55, 85, 104
- [9] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu, *Lifting in Sobolev spaces*, J. Anal. Math. **80** (2000), 37–86. ↑45, 46, 53, 101, 104, 110, 112, 115, 116, 121, 122, 123, 126
- [10] P. Bousquet, *Topological singularities in  $W^{s,p}(S^N, S^1)$* , J. Anal. Math. **102** (2007), 311–346. ↑90
- [11] P. Bousquet, A. C. Ponce, and J. Van Schaftingen, *Density of smooth maps for fractional Sobolev spaces  $W^{s,p}$  into  $\ell$  simply connected manifolds when  $s \geq 1$* , Confluentes Math. **5** (2013), no. 2, 3–22. ↑51, 74, 88
- [12] ———, *Strong approximation of fractional Sobolev maps*, J. Fixed Point Theory Appl. **15** (2014), no. 1, 133–153. ↑90
- [13] ———, *Strong density for higher order Sobolev spaces into compact manifolds*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 4, 763–817. ↑72
- [14] ———, *Density of bounded maps in Sobolev spaces into complete manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **196** (2017), no. 6, 2261–2301. ↑48, 100
- [15] ———, *Weak approximation by bounded Sobolev maps with values into complete manifolds*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **356** (2018), no. 3, 264–271. ↑100
- [16] ———, *Generic topological screening and approximation of Sobolev maps*, En préparation. ↑18
- [17] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. ↑21, 22, 24, 26, 27, 57
- [18] H. Brezis and Y. Li, *Topology and Sobolev spaces*, J. Funct. Anal. **183** (2001), no. 2, 321–369. ↑73
- [19] H. Brezis and P. Mironescu, *Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces*, J. Evol. Equ. **1** (2001), no. 4, 387–404. ↑43, 50, 113
- [20] ———, *Density in  $W^{s,p}(\Omega; N)$* , J. Funct. Anal. **269** (2015), no. 7, 2045–2109. ↑70, 71

- [21] ———, *Gagliardo-Nirenberg inequalities and non-inequalities : the full story*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **35** (2018), no. 5, 1355–1376. ↑43, 49
- [22] ———, *Sobolev maps to the circle*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 96, Birkhäuser/Springer, New York, 2021. ↑10, 18, 19, 43, 50, 84, 85, 90, 92, 112, 115, 127, 128
- [23] H. Brezis and L. Nirenberg, *Degree theory and BMO. I. Compact manifolds without boundaries*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), no. 2, 197–263. ↑25, 26, 123
- [24] D. Chiron, *On the definitions of Sobolev and BV spaces into singular spaces and the trace problem*, Commun. Contemp. Math. **9** (2007), no. 4, 473–513. ↑115
- [25] E. DiBenedetto, *Real analysis*, 2nd ed., Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, 2016. ↑34, 37
- [26] M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. ↑116
- [27] M. Escobedo, *Some remarks on the density of regular mappings in Sobolev classes of  $S^M$ -valued functions*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **1** (1988), no. 1-3, 127–144. ↑31, 71
- [28] H. Federer and W. H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 458–520. ↑83
- [29] R. L. Foote, *Regularity of the distance function*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), no. 1, 153–155. ↑24
- [30] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **27** (1957), 284–305. ↑35, 38
- [31] ———, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat. **8** (1959), 24–51. ↑50
- [32] P. Hajłasz, *Approximation of Sobolev mappings*, Nonlinear Anal. **22** (1994), no. 12, 1579–1591. ↑74, 88
- [33] F.-B. Hang and F.-H. Lin, *Topology of Sobolev mappings. II*, Acta Math. **191** (2003), no. 1, 55–107. ↑55
- [34] R. Hardt and F.-H. Lin, *Mappings minimizing the  $L^p$  norm of the gradient*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 5, 555–588. ↑43, 78, 79
- [35] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ↑31, 46, 125
- [36] S.-T. Hu, *Homotopy theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII, Academic Press, New York-London, 1959. ↑46, 125
- [37] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova, *An elementary proof of the Brezis and Mironescu theorem on the composition operator in fractional Sobolev spaces*, J. Evol. Equ. **2** (2002), no. 1, 113–125. ↑51, 89
- [38] ———, *On the Brezis and Mironescu conjecture concerning a Gagliardo-Nirenberg inequality for fractional Sobolev norms*, J. Math. Pures Appl. (9) **81** (2002), no. 9, 877–884. ↑43
- [39] N. G. Meyers and J. Serrin,  *$H = W$* , Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 1055–1056. ↑22, 23
- [40] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. ↑81
- [41] P. Mironescu, *Sobolev maps on manifolds : degree, approximation, lifting*, Perspectives in nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., vol. 446, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 413–436. ↑31
- [42] ———, *Note on Gagliardo's theorem " $\text{tr}W^{1,1} = L^1$ "*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser. **6(LXIV)** (2015), no. 1, 99–103. ↑38
- [43] ———, *The role of the Hardy type inequalities in the theory of function spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **63** (2018), no. 4, 447–525. ↑22, 24, 95, 118
- [44] P. Mironescu and J. Van Schaftingen, *Lifting in compact covering spaces for fractional Sobolev mappings*, Anal. PDE **14** (2021), no. 6, 1851–1871. ↑102, 117, 119, 120, 123, 127

- [45] ———, *Trace theory for Sobolev mappings into a manifold*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **30** (2021), no. 2, 281–299. ↑44, 91, 95, 97, 125
- [46] A. Monteil and J. Van Schaftingen, *Uniform boundedness principles for Sobolev maps into manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **36** (2019), no. 2, 417–449. ↑99
- [47] J. Nash,  *$C^1$  isometric imbeddings*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 383–396. ↑14
- [48] ———, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 20–63. ↑14
- [49] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **13** (1959), 115–162. ↑50
- [50] M. R. Pakzad, *Weak density of smooth maps in  $W^{1,1}(M, N)$  for non-abelian  $\pi_1(N)$* , Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), no. 1, 1–12. ↑74
- [51] M. R. Pakzad and T. Rivière, *Weak density of smooth maps for the Dirichlet energy between manifolds*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 1, 223–257. ↑75
- [52] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, measures and capacities*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 23, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. ↑34, 37, 84
- [53] T. Rivière, *Dense subsets of  $H^{1/2}(S^2, S^1)$* , Ann. Global Anal. Geom. **18** (2000), no. 5, 517–528. ↑71
- [54] D. Sarason, *Functions of vanishing mean oscillation*, Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405. ↑26
- [55] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*, J. Differential Geom. **18** (1983), no. 2, 253–268. ↑25, 31
- [56] J. Van Schaftingen, *Sobolev mappings into manifolds : nonlinear methods for approximation, extension and lifting problems: Lecture notes*, Oxford, 2019. ↑10, 79, 104, 108
- [57] M. Willem, *Functional analysis*, Cornerstones, Birkhäuser/Springer, New York, 2013. ↑16, 17, 21, 22, 24, 26, 27, 35, 58, 62





UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/sc](http://www.uclouvain.be/sc)