Problèmes NP-complets, ou comment gagner un million en remplissant un sac à dos

Antoine Detaille

Institut Camille Jordan

Le 25 juin 2025

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !
De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !
De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !
De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !
De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !

De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Quelques préjugés communs

- En maths, il n'y a plus rien à chercher.
- Tout a été démontré depuis Pythagore.
- Le travail des mathématiciens, c'est de faire des calculs compliqués ou de trouver des décimales de π.

Au contraire, il reste de nombreux problèmes importants à résoudre !
De nouveaux théorèmes sont démontrés quotidiennement pour tenter d'y répondre.

Une liste de problèmes célèbre

À la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle, l'*Institut Clay* met à prix 7 problèmes, appelés *problèmes du millénaire*.

Toute personne parvenant à en résoudre un, et dont la solution sera approuvée par la communauté des mathématiciens, se verra remettre une récompense de *un million de dollars*.

Attention : ce n'est pas parce qu'un problème n'est pas dans cette liste qu'il n'est pas important, ou qu'il l'est moins qu'un autre !

Une liste de problèmes célèbre

À la fin du XX^{e} siècle, l'*Institut Clay* met à prix 7 problèmes, appelés *problèmes du millénaire*.

Toute personne parvenant à en résoudre un, et dont la solution sera approuvée par la communauté des mathématiciens, se verra remettre une récompense de *un million de dollars*.

Attention : ce n'est pas parce qu'un problème n'est pas dans cette liste qu'il n'est pas important, ou qu'il l'est moins qu'un autre !

L'hypothèse de Riemann

Énoncé : *Les zéros non triviaux de la fonction* ζ *de Riemann ont tous pour partie réelle* $1/2$.

À quoi ça sert : La fonction ζ, et la répartition de ses zéros, donne d'importantes indications sur la répartition des *nombres premiers*.

L'hypothèse de Riemann

Énoncé : *Les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann ont tous pour partie réelle* $1/2$.

À quoi ça sert : La fonction ζ, et la répartition de ses zéros, donne d'importantes indications sur la répartition des *nombres premiers*.

La conjecture de Hodge

Énoncé : *Soit* X *une variété projective complexe non singulière. Chaque classe de Hodge sur* X *est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des classes de cohomologie des sous-variétés complexes de* X.

Traduction : On peut connaître des informations sur une surface (par exemple le nombre de trous) juste en regardant des parties de plus petite dimension, comme des courbes.

La conjecture de Hodge

Énoncé : *Soit* X *une variété projective complexe non singulière. Chaque classe de Hodge sur* X *est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des classes de cohomologie des sous-variétés complexes de* X.

Traduction : On peut connaître des informations sur une surface (par exemple le nombre de trous) juste en regardant des parties de plus petite dimension, comme des courbes.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Énoncé : *Pour toute courbe elliptique sur le corps des rationnels, l'ordre d'annulation au centre de la bande critique de la fonction* L *associée est égal au rang de la courbe.*

Pourquoi c'est important : Cette conjecture établirait un lien profond entre deux branches distinctes des mathématiques : la théorie des nombres, et la théorie des fonctions.

La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Énoncé : *Pour toute courbe elliptique sur le corps des rationnels, l'ordre d'annulation au centre de la bande critique de la fonction* L *associée est égal au rang de la courbe.*

Pourquoi c'est important : Cette conjecture établirait un lien profond entre deux branches distinctes des mathématiques : la théorie des nombres, et la théorie des fonctions.

Les équations de Navier–Stokes

Énoncé : *Il existe des solutions régulières en temps long aux équations de Navier–Stokes.*

Pourquoi c'est utile : Les équations de Navier–Stokes sont très utilisées pour modéliser l'écoulement d'un fluide, étudier les turbulences, etc.

Les équations de Navier–Stokes

Énoncé : *Il existe des solutions régulières en temps long aux équations de Navier–Stokes.*

Pourquoi c'est utile : Les équations de Navier–Stokes sont très utilisées pour modéliser l'écoulement d'un fluide, étudier les turbulences, etc.

Les équations de Yang–Mills

Énoncé : *Tout groupe de jauge compact simple admet une théorie de Yang–Mills quantique non triviale et a un écart de masse strictement positif.*

Pourquoi c'est important : Les théories de Yang–Mills sont utilisées de façon cruciale en physique des particules, notamment en lien avec la modélisation des forces fondamentales.

Les équations de Yang–Mills

Énoncé : *Tout groupe de jauge compact simple admet une théorie de Yang–Mills quantique non triviale et a un écart de masse strictement positif.*

Pourquoi c'est important : Les théories de Yang–Mills sont utilisées de façon cruciale en physique des particules, notamment en lien avec la modélisation des forces fondamentales.

La conjecture de Poincaré

Énoncé : *Toute variété compacte sans bord simplement connexe de dimension* 3 *est homéomorphe à la sphère de dimension* 3.

Traduction : Si ça ressemble à une sphère, c'est une sphère.

Ce problème est le *seul* des 7 à avoir été résolu, en 2003, par Grigori Perelman, à l'aide également de travaux de Richard Hamilton.

La conjecture de Poincaré

Énoncé : *Toute variété compacte sans bord simplement connexe de dimension* 3 *est homéomorphe à la sphère de dimension* 3.

Traduction : Si ça ressemble à une sphère, c'est une sphère.

Ce problème est le *seul* des 7 à avoir été résolu, en 2003, par Grigori Perelman, à l'aide également de travaux de Richard Hamilton.

La conjecture de Poincaré

Énoncé : *Toute variété compacte sans bord simplement connexe de dimension* 3 *est homéomorphe à la sphère de dimension* 3.

Traduction : Si ça ressemble à une sphère, c'est une sphère.

Ce problème est le *seul* des 7 à avoir été résolu, en 2003, par Grigori Perelman, à l'aide également de travaux de Richard Hamilton.

Problème polynômial

Un problème est dans P lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour toute instance de taille n, le nombre d'opérations à effectuer pour résoudre le problème sur cette instance est au plus $p(n)$.

Exemples :

- l'addition écrite ;
- trouver le plus grand élément d'une liste.

Problème polynômial

Un problème est dans P lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour toute instance de taille n, le nombre d'opérations à effectuer pour résoudre le problème sur cette instance est au plus $p(n)$.

Exemples :

- l'addition écrite ;
- trouver le plus grand élément d'une liste.

Problème polynômial

Un problème est dans P lorsqu'il existe un polynôme p *tel que, pour toute instance de taille* n*, le nombre d'opérations à effectuer pour résoudre le problème sur cette instance est au plus* $p(n)$.

Exemples :

- l'addition écrite ;
- trouver le plus grand élément d'une liste.

Problème NP

Un problème de décision est dans NP lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour toute instance positive de taille n, il existe un certificat permettant de vérifier que l'instance est positive en moins de $p(n)$ opérations.

Exemples :

- n'importe quel problème P ;
- le problème de la coloration de graphe.

Problème NP

Un problème de décision est dans NP lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour toute instance positive de taille n, il existe un certificat permettant de vérifier que l'instance est positive en moins de $p(n)$ opérations.

Exemples :

- n'importe quel problème P ;
- le problème de la coloration de graphe.

Problème NP

Un problème de décision est dans NP lorsqu'il existe un polynôme p tel que, pour toute instance positive de taille n, il existe un certificat permettant de vérifier que l'instance est positive en moins de $p(n)$ opérations.

Exemples :

- n'importe quel problème P ;
- le problème de la coloration de graphe.

Pourquoi le temps polynômial, c'est important ?

Supposons que le temps pour résoudre le problème sur une instance de taille n soit n. Si on double n, alors on double le temps d'exécution.

Si c'est n^2, pour doubler n, on multiplie le temps d'exécution par 4. Si c'est n^3, c'est par 8. Et ainsi de suite…

Si le temps d'exécution est 2^n, alors le temps est doublé … pour augmenter n de 1 !

Si chaque opération prend une micro-seconde, il faut une seconde pour $n = 5$, et … 34 ans pour $n = 40$!

Pourquoi le temps polynômial, c'est important ?

Supposons que le temps pour résoudre le problème sur une instance de taille n soit n. Si on double n, alors on double le temps d'exécution.

Si c'est n^2, pour doubler n, on multiplie le temps d'exécution par 4. Si c'est n^3, c'est par 8. Et ainsi de suite. . .

Si le temps d'exécution est 2^n, alors le temps est doublé . . . pour augmenter n de 1 !

Si chaque opération prend une micro-seconde, il faut une seconde pour $n = 5$, et . . . 34 ans pour $n = 40$!

Pourquoi le temps polynômial, c'est important ?

Supposons que le temps pour résoudre le problème sur une instance de taille n soit n. Si on double n, alors on double le temps d'exécution.

Si c'est n^2, pour doubler n, on multiplie le temps d'exécution par 4. Si c'est n^3, c'est par 8. Et ainsi de suite...

Si le temps d'exécution est 2^n, alors le temps est doublé ... pour augmenter n de 1 !

Si chaque opération prend une micro-seconde, il faut une seconde pour $n = 5$, et ... 34 ans pour $n = 40$!

Pourquoi le temps polynômial, c'est important ?

Supposons que le temps pour résoudre le problème sur une instance de taille n soit n. Si on double n, alors on double le temps d'exécution.

Si c'est n^2, pour doubler n, on multiplie le temps d'exécution par 4. Si c'est n^3, c'est par 8. Et ainsi de suite…

Si le temps d'exécution est 2^n, alors le temps est doublé … pour augmenter n de 1 !

Si chaque opération prend une micro-seconde, il faut une seconde pour $n = 5$, et … 34 ans pour $n = 40$!

La réduction

On dit qu'un problème A peut être réduit à un problème B lorsque toute instance de A peut être transformée en une instance de B.

Autrement dit, le problème A est plus facile que B : si on sait résoudre B, on sait résoudre A en le transformant en B.

Un exemple modèle : Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale se réduisent l'un à l'autre.

La réduction

On dit qu'un problème A peut être réduit à un problème B lorsque toute instance de A peut être transformée en une instance de B.

Autrement dit, le problème A est plus facile que B : si on sait résoudre B, on sait résoudre A en le transformant en B.

Un exemple modèle : Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale se réduisent l'un à l'autre.

Problème NP-complet

Un problème de décision est NP-complet lorsqu'il est dans NP et qu'il est plus difficile que tout problème NP.

Si on veut résoudre P = NP, il y a deux façons de faire :

- montrer qu'un problème NP n'est pas dans P ;
- montrer qu'un problème NP-complet est dans P.

Problème NP-complet

Un problème de décision est NP-complet lorsqu'il est dans NP et qu'il est plus difficile que tout problème NP.

Si on veut résoudre P = NP, il y a deux façons de faire :

- montrer qu'un problème NP n'est pas dans P ;
- montrer qu'un problème NP-complet est dans P.

Le premier problème NP-complet

En 1971, Stephen Cook démontre que le problème SAT est NP-complet.

Sensiblement au même moment, Leonid Levin démontre également l'existence d'un problème NP-complet.

Quelques problèmes NP-complets importants

- Le problème de la coloration de graphe à au moins 3 couleurs.
- Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale.
- Le problème du voyageur de commerce.
- Le problème du séquençage des tâches.
- Le problème max-cut.

Quelques problèmes NP-complets importants

- Le problème de la coloration de graphe à au moins 3 couleurs.
- Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale.
- Le problème du voyageur de commerce.
- Le problème du séquençage des tâches.
- Le problème max-cut.

Quelques problèmes NP-complets importants

- Le problème de la coloration de graphe à au moins 3 couleurs.
- Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale.
- Le problème du voyageur de commerce.
- Le problème du séquençage des tâches.
- Le problème max-cut.

Quelques problèmes NP-complets importants

- Le problème de la coloration de graphe à au moins 3 couleurs.
- Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale.
- Le problème du voyageur de commerce.
- Le problème du séquençage des tâches.
- Le problème max-cut.

Quelques problèmes NP-complets importants

- Le problème de la coloration de graphe à au moins 3 couleurs.
- Le problème de l'ensemble indépendant maximal et le problème de la clique maximale.
- Le problème du voyageur de commerce.
- Le problème du séquençage des tâches.
- Le problème max-cut.

Quelques problèmes NP-complets amusants

- Le problème du sac à dos (KNAPSAC).
- La plupart des jeux de magazine : Sudoku, Hitori, Kakuro, Nonogram, etc.

Quelques problèmes NP-complets amusants

- Le problème du sac à dos (KNAPSAC).
- La plupart des jeux de magazine : Sudoku, Hitori, Kakuro, Nonogram, etc.

Merci de votre attention !