Autour de quelques problèmes d'approximation pour les applications de Sobolev à valeurs dans une variété

Antoine Detaille

ETH Zürich

Le 17 novembre 2025

Résumé

1 Introduction

2 Quatre questions autour de la densité des applications lisses

3 Le problème de l'approximation forte (Q1 et Q2)

4 Caractériser la clôture des applications lisses (Q3)

5 Le problème de l'approximation faible (Q4)

Applications de Sobolev à valeurs dans une variété

Soit $\mathscr{N}$ une variété riemannienne lisse compacte, $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}^\nu$. Soit $\mathscr{M}$ une variété riemannienne lisse compacte, de dimension m. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $0 < s < +\infty$.

Applications de Sobolev à valeurs dans une variété

Soit $\mathscr{N}$ une variété riemannienne lisse compacte, $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}^\nu$. Soit $\mathscr{M}$ une variété riemannienne lisse compacte, de dimension m. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $0 < s < +\infty$.

Définition

$$W^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N}) = \{u \in W^{s,p}(\mathscr{M};\mathbb{R}^\nu) \colon u(x) \in \mathscr{N} \text{ pour presque tout } x \in \mathscr{M}\}$$

Motivation

- Cadre naturel pour l'étude d'applications harmoniques entre variétés (a débuté notamment avec Eells, Hildebrandt, Jost, Kaul, Lemaire, Sampson, et Widman).

Motivation

- Cadre naturel pour l'étude d'applications harmoniques entre variétés (a débuté notamment avec Eells, Hildebrandt, Jost, Kaul, Lemaire, Sampson, et Widman).
- Permet d'encoder l'orientation d'un carré ou d'un cube pour l'imagerie numérique (voir par exemple Huang, Tong, Wei, et Bao (2011), ou le projet *hextreme*).

Motivation

- Cadre naturel pour l'étude d'applications harmoniques entre variétés (a débuté notamment avec Eells, Hildebrandt, Jost, Kaul, Lemaire, Sampson, et Widman).
- Permet d'encoder l'orientation d'un carré ou d'un cube pour l'imagerie numérique (voir par exemple Huang, Tong, Wei, et Bao (2011), ou le projet *hextreme*).
- Plus récemment, utilisé dans l'étude des matériaux homogènes, notamment en ferromagnétisme (voir par exemple les contributions récentes de Davoli, Gavioli, Happ, et Pagliari).

Motivation

- Cadre naturel pour l'étude d'applications harmoniques entre variétés (a débuté notamment avec Eells, Hildebrandt, Jost, Kaul, Lemaire, Sampson, et Widman).
- Permet d'encoder l'orientation d'un carré ou d'un cube pour l'imagerie numérique (voir par exemple Huang, Tong, Wei, et Bao (2011), ou le projet *hextreme*).
- Plus récemment, utilisé dans l'étude des matériaux homogènes, notamment en ferromagnétisme (voir par exemple les contributions récentes de Davoli, Gavioli, Happ, et Pagliari).
- Et bien plus encore (Ginzburg–Landau, matériaux de Cosserat, etc.).

Le problème de l'approximation forte

Théorème

L'espace $C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$ est dense dans $W^{s,p}(\mathscr{M}; \mathbb{R})$.

Le problème de l'approximation forte

Théorème

L'espace $C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ est dense dans $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathbb{R})$.

On définit

$$H_S^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N}) = \overline{C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})}^{W^{s,p}}.$$

Le problème de l'approximation forte

Théorème

L'espace $C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ est dense dans $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathbb{R})$.

On définit

$$H^{s,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N}) = \overline{C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})}^{W^{s,p}}.$$

Question

A-t-on $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N}) = H^{s,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N})$?

Le contre-exemple fondateur de Schoen et Uhlenbeck

Proposition (Schoen et Uhlenbeck (1983))

L'application $u_0 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$ définie par $u_0(x) = x/|x|$ vérifie

$$u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \setminus H_S^{1,p}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \quad \text{lorsque } 2 \leq p < 3.$$

Le contre-exemple fondateur de Schoen et Uhlenbeck

Proposition (Schoen et Uhlenbeck (1983))

L'application $u_0 \colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$ définie par $u_0(x) = x/|x|$ vérifie

$$u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \setminus H^{1,p}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \quad \text{lorsque } 2 \leq p < 3.$$

Deux propriétés importantes :

- l'application u_0 est lisse *en dehors d'une singularité ponctuelle* ;

Le contre-exemple fondateur de Schoen et Uhlenbeck

Proposition (Schoen et Uhlenbeck (1983))

L'application $u_0 : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{S}^2$ définie par $u_0(x) = x/|x|$ vérifie

$$u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \setminus H^{1,p}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \quad \text{lorsque } 2 \leq p < 3.$$

Deux propriétés importantes :

- l'application u_0 est lisse *en dehors d'une singularité ponctuelle* ;
- l'obstruction vient du fait que $\pi_2(\mathbb{S}^2) \neq \{0\}$.

Résumé

1. Introduction
2. Quatre questions autour de la densité des applications lisses
3. Le problème de l'approximation forte (Q1 et Q2)
4. Caractériser la clôture des applications lisses (Q3)
5. Le problème de l'approximation faible (Q4)

Quatre questions naturelles

(Q1) Caractériser les s, p, $\mathscr{M}$, et $\mathscr{N}$ pour lesquels il y a densité forte des applications lisses.

(Q2) Trouver une classe convenable d'applications *presque lisses* qui est toujours dense dans $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})$.

(Q3) Quand la densité forte échoue, caractériser l'espace $H^{s,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N})$.

(Q4) Qu'advient-il en remplaçant la convergence forte par une notion plus faible ?

Une digression : le cas facile $sp \geq m$

Lorsque $sp \geq m$, il est *toujours* vrai que $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N}) = H^{s,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N})$ (Schoen et Uhlenbeck (1983)).

Une digression : le cas facile $sp \geq m$

Lorsque $sp \geq m$, il est *toujours* vrai que $W^{s,p}(\mathscr{M};\mathscr{N}) = H^{s,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N})$ (Schoen et Uhlenbeck (1983)).

L'ingrédient clef est l'injection de Morrey–Sobolev $W^{s,p} \hookrightarrow C^0$, ou son cas limite $W^{s,p} \hookrightarrow \mathrm{VMO}$ lorsque $sp = m$ (Brezis et Nirenberg (1995)).

Résumé

1 Introduction

2 Quatre questions autour de la densité des applications lisses

3 Le problème de l'approximation forte (Q1 et Q2)

4 Caractériser la clôture des applications lisses (Q3)

5 Le problème de l'approximation faible (Q4)

Une classe d'applications presque lisses

Définition

La classe $\mathscr{R}_i(\mathscr{M};\mathscr{N})$ est l'ensemble des applications $u\colon \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ qui sont lisses en dehors d'un ensemble singulier $\mathscr{S} = \mathscr{S}_u$ tel que

- $\mathscr{S}$ est une union finie de sous-variétés de $\mathscr{M}$ de dimension i ;
- pour tout $j \in \mathbb{N}_*$, il existe une constante $C = C_j > 0$ telle que

$$|\mathrm{D}^j u(x)| \leq \frac{C}{\operatorname{dist}(x, \mathscr{S})^j} \quad \text{pour tout } x \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}.$$

Le théorème de densité forte : le cas modèle $s = 1$

Théorème (Bethuel (1991))

Supposons que $p < m$. Alors,

- $W^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N}) = H_S^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ si et seulement si $\pi_{\lfloor p \rfloor}(\mathscr{N}) = \{0\}$;
- la classe $\mathscr{R}_{m-\lfloor p \rfloor -1}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ est toujours dense dans $W^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$.

Des cas partiels ont été obtenus par Bethuel et Zheng (1988).

Le théorème de densité forte : le cas modèle $s = 1$

Théorème (Bethuel (1991))

Supposons que $p < m$. Alors,

- $W^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N}) = H_S^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ si et seulement si $\pi_{\lfloor p \rfloor}(\mathscr{N}) = \{0\}$;
- la classe $\mathscr{R}_{m-\lfloor p \rfloor -1}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ est toujours dense dans $W^{1,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$.

Des cas partiels ont été obtenus par Bethuel et Zheng (1988).

Le cas d'un domaine arbitraire $\mathscr{M}$ est connu depuis Hang et Lin (2003). Des obstructions globales peuvent également se présenter dans ce cas.

Extensions à $0 < s < +\infty$

Cas $0 < s < 1$: Brezis et Mironescu (2015), après des contributions partielles de Bethuel (1995), Rivière (2000), Bousquet (2007), Mucci (2009), et Bousquet, Ponce, et Van Schaftingen (2013).

Cas $s \in \mathbb{N}_*$: Bousquet, Ponce, et Van Schaftingen (2015).

Cas général $0 < s < +\infty$: si $\mathscr{N}$ est une sphère, Escobedo (1988), et si $\mathscr{N}$ est $\lfloor sp \rfloor$-connexe, Bousquet, Ponce, et Van Schaftingen (2014).

La réponse complète au problème de l'approximation forte

Théorème (D. (2023))

Supposons que $sp < m$. Alors,

- $W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N}) = H_S^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ si et seulement si $\pi_{\lfloor sp \rfloor}(\mathscr{N}) = \{0\}$;
- la classe $\mathscr{R}_{m-\lfloor sp \rfloor -1}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ est toujours dense dans $W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$.

L'argument se transpose au cas d'un domaine général $\mathscr{M}$, en suivant Hang et Lin.

Résumé

1 Introduction

2 Quatre questions autour de la densité des applications lisses

3 Le problème de l'approximation forte (Q1 et Q2)

4 Caractériser la clôture des applications lisses (Q3)

5 Le problème de l'approximation faible (Q4)

Un candidat prometteur : le jacobien

Soit $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$. Définissons $Ju = \mathrm{d}(u^\sharp \omega_{\mathbb{S}^2})$ au sens des distributions :

$$\langle Ju, \alpha \rangle = -\int_{\mathbb{B}^3} \mathrm{d}\alpha \wedge u^\sharp \omega_{\mathbb{S}^2} \quad \text{pour tout } \alpha \in C_c^\infty(\mathbb{B}^3).$$

Cette définition est due à Ball (1976).

Un candidat prometteur : le jacobien

Soit $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$. Définissons $Ju = \mathrm{d}(u^\sharp \omega_{\mathbb{S}^2})$ au sens des distributions :

$$\langle Ju, \alpha \rangle = -\int_{\mathbb{B}^3} \mathrm{d}\alpha \wedge u^\sharp \omega_{\mathbb{S}^2} \quad \text{pour tout } \alpha \in C^\infty_c(\mathbb{B}^3).$$

Cette définition est due à Ball (1976).

Calculons Ju_0, où $u_0(x) = x/|x|$.

Caractériser la clôture des applications lisses avec le jacobien

On calcule $Ju_0 = 4\pi\delta_0$.

Caractériser la clôture des applications lisses avec le jacobien

On calcule $Ju_0 = 4\pi\delta_0$.

D'autre part, si $u \in H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$, alors $Ju = 0$.

Caractériser la clôture des applications lisses avec le jacobien

On calcule $Ju_0 = 4\pi\delta_0$.

D'autre part, si $u \in H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$, alors $Ju = 0$.

Théorème (Bethuel (1990))

$$H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) = \{u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \colon Ju = 0\}$$

Perspectives de généralisations

Cette idée a été étendue à des variétés dont *la cohomologie détecte l'homotopie* par Bethuel, Coron, Demengel, et Hélein (1991), et par Bousquet, Ponce, et Van Schaftingen (2025) aux espaces d'ordre supérieur.

Voir également

- les courants cartésiens par Giaquinta, Modica, et Souček ;
- les chaînes bémol à valeurs dans $\pi_{\lfloor p \rfloor}(\mathcal{N})$ par Pakzad et Rivière (2003), et Canevari et Orlandi (2019) ;
- les scans par Hardt et Rivière (2003, 2008).

Une caractérisation analytique de la clôture des applications lisses en régularité fractionnaire

Théorème (D., Mironescu, et Xiao (2025))

Supposons que $0 < s < 1$ et que $sp < m$.

- Pour toute $\lfloor sp \rfloor$-forme fermée ω sur $\mathscr{N}$, il existe un jacobien J_ω bien défini, qui étend par continuité la notion précédente à $W^{s,p}(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$.
- Si *la cohomologie de $\mathscr{N}$ détecte son homotopie*, alors $u \in H^{s,p}_S(\mathbb{B}^m; \mathscr{N})$ si et seulement si $J_\omega u = 0$ pour tout ω.

Ceci est dans la continuité de résultats de Bourgain, Brezis, et Mironescu (2005), et Bousquet et Mironescu (2014), pour définir le jacobien et étudier ses propriétés, et de Mucci (2024), pour des applications à valeurs dans la sphère.

Résumé

1. Introduction
2. Quatre questions autour de la densité des applications lisses
3. Le problème de l'approximation forte (Q1 et Q2)
4. Caractériser la clôture des applications lisses (Q3)
5. Le problème de l'approximation faible (Q4)

Le problème de l'approximation faible

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers u dans $W^{1,p}$, et on écrit $u_n \rightharpoonup u$, lorsque $u_n \to u$ presque partout et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^{1,p}(u_n, \mathscr{M}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathscr{M}} |\mathrm{D}u_n|^p < +\infty.$$

Définissons

$$H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = \{u \in W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})\colon \text{il existe } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dans } C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N}) \text{ telle que } u_n \rightharpoonup u\}.$$

Le problème de l'approximation faible

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* vers u dans $W^{1,p}$, et on écrit $u_n \rightharpoonup u$, lorsque $u_n \to u$ presque partout et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}^{1,p}(u_n, \mathscr{M}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathscr{M}} |\mathrm{D}u_n|^p < +\infty.$$

Définissons

$$H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = \{u \in W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})\colon \text{il existe } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dans } C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N}) \text{ telle que } u_n \rightharpoonup u\}.$$

Question

A-t-on $H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})$?

Une obstruction topologique : nous y revoilà ?

Si $p \notin \mathbb{N}$ et $\pi_{\lfloor p \rfloor}(\mathscr{N}) \neq \{0\}$, alors $H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) \subsetneq W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})$ lorsque $\dim \mathscr{M} > p$.

Une obstruction topologique : nous y revoilà ?

Si $p \notin \mathbb{N}$ et $\pi_{\lfloor p \rfloor}(\mathscr{N}) \neq \{0\}$, alors $H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) \subsetneq W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})$ lorsque $\dim \mathscr{M} > p$.

Théorème (Bethuel (1991))

Si $p \notin \mathbb{N}$, alors $H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = H^{1,p}_S(\mathscr{M};\mathscr{N})$.

Un phénomène nouveau : le cas $p \in \mathbb{N}$

Contrairement à $2 < p < 3$, on a $x/|x| \in H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$.

Un phénomène nouveau : le cas $p \in \mathbb{N}$

Contrairement à $2 < p < 3$, on a $x/|x| \in H_W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$.

Plus généralement, on a :

- $H_S^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \subsetneq H_W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) = W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$ (Bethuel (1990)) ;

Un phénomène nouveau : le cas $p \in \mathbb{N}$

Contrairement à $2 < p < 3$, on a $x/|x| \in H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$.

Plus généralement, on a :

- $H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \subsetneq H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) = W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$ (Bethuel (1990)) ;
- $H^{1,p}_W(\mathscr{M}; \mathscr{N}) = W^{1,p}(\mathscr{M}; \mathscr{N})$ lorsque $\mathscr{N}$ est $(p-1)$-connexe (Hajłasz (1994)) ;

Un phénomène nouveau : le cas $p \in \mathbb{N}$

Contrairement à $2 < p < 3$, on a $x/|x| \in H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)$.

Plus généralement, on a :

- $H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2) \subsetneq H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2) = W^{1,2}(\mathbb{B}^3;\mathbb{S}^2)$ (Bethuel (1990)) ;
- $H^{1,p}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = W^{1,p}(\mathscr{M};\mathscr{N})$ lorsque $\mathscr{N}$ est $(p-1)$-connexe (Hajłasz (1994)) ;
- $H^{1,2}_W(\mathscr{M};\mathscr{N}) = W^{1,2}(\mathscr{M};\mathscr{N})$ pour des $\mathscr{N}$ plus générales (Pakzad et Rivière (2003)) ;

Un phénomène nouveau : le cas $p \in \mathbb{N}$

Contrairement à $2 < p < 3$, on a $x/|x| \in H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$.

Plus généralement, on a :

- $H^{1,2}_S(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) \subsetneq H^{1,2}_W(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2) = W^{1,2}(\mathbb{B}^3; \mathbb{S}^2)$ (Bethuel (1990)) ;
- $H^{1,p}_W(\mathscr{M}; \mathscr{N}) = W^{1,p}(\mathscr{M}; \mathscr{N})$ lorsque $\mathscr{N}$ est $(p-1)$-connexe (Hajłasz (1994)) ;
- $H^{1,2}_W(\mathscr{M}; \mathscr{N}) = W^{1,2}(\mathscr{M}; \mathscr{N})$ pour des $\mathscr{N}$ plus générales (Pakzad et Rivière (2003)) ;
- $H^{2,2}_W(\mathbb{B}^5; \mathbb{S}^3) = W^{2,2}(\mathbb{B}^5; \mathbb{S}^3)$ (Hardt et Rivière (2015)).

Les obstructions contre-attaquent : l'obstruction analytique

Théorème (Bethuel (2020))

$$H^{1,3}_W(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2) \subsetneq W^{1,3}(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2)$$

Les obstructions contre-attaquent : l'obstruction analytique

Théorème (Bethuel (2020))

$$H^{1,3}_W(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2) \subsetneq W^{1,3}(\mathbb{B}^4;\mathbb{S}^2)$$

Des obstructions topologiques globales étaient déjà connues (Hang et Lin (2003)).
Ici, l'obstruction est locale.

Deux familles d'obstructions analytiques à l'approximation faible

Théorème (D. et Van Schaftingen (2024))

Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il existe une variété riemannienne lisse compacte $\mathscr{N}$ telle que, si $\dim \mathscr{M} > p$, alors

$$H^{1,p}_W(\mathscr{M}; \mathscr{N}) \subsetneq W^{1,p}(\mathscr{M}; \mathscr{N}).$$

Deux familles d'obstructions analytiques à l'approximation faible

Théorème (D. et Van Schaftingen (2024))

Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, il existe une variété riemannienne lisse compacte $\mathscr{N}$ telle que, si $\dim \mathscr{M} > p$, alors

$$H^{1,p}_W(\mathscr{M}; \mathscr{N}) \subsetneq W^{1,p}(\mathscr{M}; \mathscr{N}).$$

Théorème (D. et Van Schaftingen (2024))

Pour tout $d \in \mathbb{N}_*$, si $\dim \mathscr{M} > 4d - 1$, alors

$$H^{1,4d-1}_W(\mathscr{M}; \mathbb{S}^{2d}) \subsetneq W^{1,4d-1}(\mathscr{M}; \mathbb{S}^{2d}).$$

L'idée clef au cœur de la construction

Pour $\mathscr{N} = \mathbb{S}^{2d}$, on construit u à l'aide d'applications de degré de Hopf égal à 2 sur une grille, *via* un produit de Whitehead.

Pour la première famille, on construit u à l'aide d'applications quotient périodiques à valeurs dans le p-squelette de $\mathbb{T}^{p+1}$.

L'idée clef au cœur de la construction

Pour $\mathscr{N} = \mathbb{S}^{2d}$, on construit u à l'aide d'applications de degré de Hopf égal à 2 sur une grille, *via* un produit de Whitehead.

Pour la première famille, on construit u à l'aide d'applications quotient périodiques à valeurs dans le p-squelette de $\mathbb{T}^{p+1}$.

Au cœur de la démonstration pour la première famille, on trouve l'*inégalité isopérimétrique*, et pour la seconde famille, l'*estimée de Rivière pour l'invariant de Hopf* (1998).

Merci pour votre attention !